

BRÅK INOM MATEMATIKUNDERVISNINGEN

– EN LEARNING STUDY OM ATT
STORLEKSORDNA OCH JÄMFÖRA BRÅKTAL

Avancerad nivå
Pedagogiskt arbete

Adam Lindberg
Johan Issa

2024-LÄR4-6-A12



HÖGSKOLAN I BORÅS

Program: Grundlärarutbildningen med inriktning mot arbete i grundskolans årskurs 4-6

Svensk titel: BRÅK INOM MATEMATIKUNDERVISNINGEN

– EN LEARNING STUDY OM ATT STORLEKSORDNA OCH JÄMFÖRA BRÅKTAL

Engelsk titel: Fractions in mathematics education – a learning study on the ordering of and comparing fractions

Utgivningsår: 2024

Författare: Adam Lindberg och Johan Issa

Handledare: Dennis Beach

Examinator: Nuhi Bajqinca

Nyckelord: Bråk, learning study, variationsteorin, kritiska aspekter, lärandeobjekt

Sammanfattning

Svenska elevers prestationer inom matematik har enligt undersökningar försämrats på senare tid, exempelvis på den internationella studien PISA 2022 där resultat ligger nära det rekordlåga resultatet från 2012 (Skolverket 2022). Ur ett samhällsperspektiv är det därav angeläget att motverka denna negativa utveckling, då matematikkunskaper utgör en grund för individens möjligheter att verka och bidra aktivt i samhället. För att kunna bidra med kunskap till forskningsfältet genomfördes ett praktiktäna forskningsprojekt i tre cykler med avsikten att förbättra och utveckla elevernas lärande samt förståelse inom matematikämnet bråk.

Med en variationsteoretisk ansats genomfördes en learning study för att belysa elevers lärande genom att identifiera kritiska aspekter som verkar för att utveckla elevers förståelse inom matematikområdet bråk. Syftet med studien var att undersöka hur matematikundervisningen bör utformas för att eleverna skall få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Utifrån dessa frågeställningar undersöks sedan elevernas lärande samt utveckling inom matematikområdet. Detta syfte utforskades vidare genom följande frågeställningar:

- Vilka är de kritiska aspekterna vid undervisning om lärandeobjektet att storleksordna och jämföra bråktal för de aktuella elevgrupperna?
- Hur bör matematikundervisningen utformas för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna?
- Hur har elevernas lärande inom bråk utvecklats utifrån lärandeobjektet?

Studien visar hur en learning study med implementering av ett variationsteoretiskt perspektiv, som bygger på innehållscentrerat lärande, resulterar i en framgångsrik matematikundervisning som erbjuder både variation och sammanhang. De 60 deltagande eleverna kom in med varierande men jämn spridning av förkunskaper inom klasserna inför den första lärandecykeln, resultaten visar en synbar progression i kunskapsnivå mellan eleverna som deltog vid lärande cykel ett jämfört med lärandecykel tre. Utfallet av studien understryker att variation i undervisningen är av stor vikt för att eleverna ska kunna identifiera kritiska aspekter av lärandeobjektet, vilket är en förutsättning för att kunna tillägna sig ny kunskap.

Innehållsförteckning

1. INLEDNING	1
2. SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNING	2
3. TIDIGARE FORSKNING	2
3.1 Sökprocessen i tidigare forskning	2
3.2 Bråktal	3
3.3 Forskning inom matematikämnet bråk.....	3
3.4 Strategier för förståelse inom bråk.....	5
3.5 Learning study.....	6
3.6 Tidigare forskning i relation till denna studie.....	8
4. TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER	8
4.1 Variationsteorin	9
4.2 Metod och material	10
4.2.1 Urvalskriterier	10
4.2.2 Studiens genomförande.....	11
4.2.3 Analysprocess.....	13
4.2.4 Planering av lektionsdesign.....	13
4.2.5 Reliabilitet och validitet	14
4.2.6 Etik	14
4.3 Reflektion av val av metod	15
5. RESULTAT	16
5.1 Analys av förtest	16
5.2 Lektion 1	17
5.2.1 Analys av lektion 1	20
5.2.2 Planering inför lektion 2.....	21
5.3 Lektion 2	21
5.3.1 Analys av lektion 2	23
5.3.2 Planering inför lektion 3.....	23
5.4 Lektion 3	24
5.4.1 Slutgiltig analys och analys av eftertest	26
5.4 Sammanfattning av resultat	28
6. DISKUSSION	29
6.1 Metoddiskussion	31
6.2 Implikationer för läraryrket	32
6.3 Framtida forskning	32

1. INLEDNING

Denna studie har med variationsteorin som ansats undersökt hur matematikundervisningen bör utformas för att elever ska tillägna sig kunskaper inom bråktal. Med hjälp av en learning study har kritiska aspekter identifierats och belysts med hjälp av variationsmönster för att undersöka hur förutsättningar kan skapas för lärande inom matematikområdet.

Rationella tal förekommer i många former i vår vardag, såsom i matematiska beräkningar, måttsystem, tidsangivelser, viktenheter och prissättningar, där en god förståelse för tals värde är grundläggande (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020). Elever introduceras till grundläggande taluppfattning redan under de tidiga skolåren, men begreppet utvecklas i takt med att elever vidareutvecklar sina matematikkunskaper. Förmågan att tolka och hantera olika typer av representationsformer är en grundläggande förutsättning för effektivt beslutsfattande där misstag kan ha stor påverkan på resultatet (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020). I läroplanen för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet framhävs taluppfattningen som en central aspekt av elevers lärande där området bråktal identifieras som en av de grundläggande komponenterna inom matematikämnet (Skolverket 2022).

Löwing (2017) understryker att grundläggande matematikkunskaper är avgörande för individens förmåga att verka i samhället och hänvisar till forskning som lyfter fram ett specifikt kunskapsområde som eleverna behöver bemästra för att utveckla "Mathematical Proficiency" (Kilpatrick, se Löwing 2017) där förståelsen om tal i bråkform är central för en djupgående insikt och utveckling inom ämnet. I tidigare forskning framförs det att såväl barn som vuxna uppvisar svårigheter inom matematikområdet bråk, vilket innefattar grundläggande förmågor, strategier, didaktik och ämneskompetens (Siegler & Lortie-Forgues 2017; Copur-Gençturk 2021). Dessa svårigheter kan i sin tur påverka förmågan att bemästra och utveckla en mer avancerad matematik som algebra, vilket kan medföra negativa effekter för möjligheterna att prestera väl inom en rad olika professioner. Forskning betonar även att en bristande förståelse rörande bråktal kan på långsikt leda till allvarliga konsekvenser inom såväl skolämnet matematik som vardagssituationer (Siegler & Lortie-Forgues 2017; Jordan, Hansen, Lynn et al. 2013).

I kommentarmaterial till kursplanen i matematik framförs det att undervisningen i årskurs 4-6 ska behandla rationella tal, vilket i grundskolesammanhang innebär bråktal, deras egenskaper, förmåga att operera med tal i olika representationsformer samt hur tal i bråkform kan användas i vardagliga situationer (Skolverket 2022). Eftersom matematik är ett abstrakt ämne visar forskningen att elevers förståelse för matematik gynnas genom att först arbeta med konkreta material innan övergången till det abstrakta.

Forskning inom learning studies utgår vanligen från variationsteorin med rötter tillbaka i INOM-gruppens forskning vid Göteborgs universitet på 1970 och 1980-talen där syftet var att skildra elevers lärande för att identifiera kritiska aspekter för att utveckla undervisningen med avsikt att stärka elevers lärande (Lo, 2014). Learning study representerar ett praktikinära forskningsprojekt som fokuserar på undervisningsinnehåll. Baserat på tidigare forskning som påvisar bristande matematiska ämneskunskaper hos både elever och lärare, samt de allvarliga konsekvenser som kan uppstå till följd av en försämrad kunskapsutveckling, framhävs bråk som en central del av matematikämnet (Wang & Siegler, 2023). Därav ämnar denna studie till att undersöka hur matematikundervisning bör utformas för att elever ska utveckla kunskaper inom

matematik och specifikt området bråk. Mot bakgrund av detta så blir det relevant att undersöka just hur en learning study med variationsteorin som utgångspunkt, ökar insikten om att utveckla elevers bråkkunskaper och därmed bidra till ny kunskap för lärare som intresserar sig inom problemområdet.

2. SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNING

Syftet med studien är att utifrån variationsteoretisk ansats skildra elevers lärande genom en learning study för att belysa kritiska aspekter som verkar för att utveckla elevers förståelse kopplat till lärandeobjektet att storleksordna och jämföra bråktal. Fokus läggs på att undersöka hur matematikundervisningen bör utformas för att eleverna skall få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Utifrån dessa frågeställningar undersöks sedan elevernas lärande samt utveckling inom matematikområdet. För att besvara syftet utgick vi från följande frågeställningar:

- Vilka är de kritiska aspekterna vid undervisning om lärandeobjektet att storleksordna och jämföra bråktal för de aktuella elevgrupperna?
- Hur bör matematikundervisningen utformas för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna?
- Hur har elevernas lärande inom bråk utvecklats utifrån lärandeobjektet?

3. TIDIGARE FORSKNING

Tidigare forskning betonar att såväl elever som lärare inte har tillräckligt med grundliga ämneskompetenser inom matematikämnet bråk. Detta avsnitt tar sin utgångspunkt i en redogörelse för sökprocessen i tidigare forskning. Därefter presenteras tidigare forskning kring elever och pedagogers färdigheter kopplat till grundliga förmågor inom området bråk. Avslutningsvis behandlas svårigheter inom förståelsen för bråk och lyckosamma strategier som kan motverka dessa. Avslutningsvis behandlas strategier för förståelse inom bråk, där lyckosamma strategier lyfts för att motverka svårigheter som är förknippade med förståelse inom bråk.

3.1 Sökprocessen i tidigare forskning

I föreliggande avsnitt redogör vi för tidigare forskning. De artiklar som stödjer denna forskning är framtagna genom systematiska sökningar från databaserna Primo, ERIC och Web Of Science. Dessutom har ytterligare relevanta artiklar identifierats genom snöbollsurval (Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström 2013). För att säkerställa artiklarnas relevans till denna studie, krävdes det att de uppfyllde ett antal kriterier för att kunna inkluderas i studien. De kriterier som granskades omfattade Peer-Review, material som behandla bråk, material som fokuserar kring elever mellan årskurs 4-8 samt forskning efter 2009. För att säkerställa att studien baseras på vetenskaplig grund var Peer review ett urvalskriterium, vilket även bidrar till

en ökad validitet (Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström 2013). Ett annat viktigt kriterium för urvalet av artiklarna var att studierna skulle behandla matematik med fokus på bråk, learning study eller variationsteorin. Vissa artiklar har även inkluderats genom sökning i redan använda artiklars referenslista. Deltagande i ämnet hade ett stort inflytande på val av artiklar då fokuset låg på medverkande i grundskolans mellanår, årskurs 4-8.

3.2 Bråktal

Bråktal är tal som uttrycks som ett förhållande (eller kvot) mellan två heltal, där ett tal (täljaren) divideras med ett annat tal (nämnaren). Med andra ord är bråktal representationer eller proportioner mellan hela tal (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020). Bråk begreppet delas traditionellt upp i olika representationsformer som, vid inläring, skapar både förståelse och applicerbarhet för eleverna. Del av en helhet innebär att bråket är kopplat till en helhet, det kan vara del av ett område där vissa delar är skuggade, del av ett antal som exempelvis en grupp med människor där $\frac{1}{4}$ består av kvinnor, del av en längd (Vi gick $\frac{1}{2}$ kilometer) och del av en del vilket utgår från en andel av en redan tilldelad del eller helhet, exempelvis Kalle har ätit halva pizzan, Olle vill äta hälften av pizzan som finns kvar ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Bråk kan även behandlas med division där utgångspunkten är att dela eller portionera i lika stora delar. Det går även tillämpa bråk som enhet där bråket representeras genom en multiplikation av en enhet, exempelvis bråket $\frac{5}{8}$ kan ses som $\frac{1}{8} \times 5$ (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020).

3.3 Forskning inom matematikämnet bråk

Forskning inom matematikdidaktik påtalar att bråk inom matematikämnet är ett av de mest utmanande områdena för både elever och lärare, vilket påverkar undervisningskvalitet och effektivitet (Copur-Gencturk 2021). Tidigare studier indikerar att även pedagoger ofta upplever svårigheter i att undervisa bråk, särskilt i årkurserna där grundläggande förståelse för rationella tal och bråkaritmetik är avgörande (Copur-Gencturk 2021). Vidare framhäver forskningen att lärare i årskurs 4 och 5 påvisar en allt för svag grundlig kompetens inom området bråk, vilket kan leda till osäker, nedsatt eller otillräcklig undervisningsfrämjande kunskapsbidragande utbildning. Forskning betonar vikten av ämneskunskaper inom matematikämnet, för att uppnå en högkvalitativ och främjande undervisningspraktik krävs det goda pedagogiska kunskaper och jämväl ingående förståelse av bråkaritmetiken (Copur-Gencturk 2021).

Teachers' in-depth understanding of the concepts they are expected to teach has important consequences for the quality of instruction they can provide as well as the kinds of understandings students can develop. (Copur-Gencturk 2021 s. 541).

Citatet ovan belyser vikten av god ämneskunskap för att säkerställa en framgångsrik och utvecklande matematikundervisning. Vidare konstaterar Copur-Gencturk för att uppnå en högkvalitativ och meningsfull undervisningspraktik krävs att lärare inte bara har en grundläggande förståelse för matematiska koncept utan även en djupgående förståelse för bråkaritmetiken (Copur-Gencturk 2021). Studier visar att viktiga matematiska förmågor inte bara stärks med hjälp av lärarnas ämneskompetens, utan även genom elevernas förmåga att

använda och applicera lämpliga strategier inom bråk (Lortie-Forgues, Tian och Siegler 2015). Centrala förmågor för en framgångsrik kunskapsinläring inom matematik, särskilt de förmågor som kopplas till matematikpedagogik och didaktik, lyfts fram som grundstenar i forskningen för att skapa en effektiv lärandemiljö. Forskningen konstaterar att elever skapar sig en djupare förståelse för matematikkunskaper när de får stöd i att utveckla viktiga matematiska förmågor och strategier, samtidigt som läraren har en stark ämnes- och pedagogisk kunskap (Fuchs, Schumacher, Long et al., 2013; Copur-Gencturk, 2021; Wang och Siegler, 2023).

Tidigare forskning belyser olika centrala förmågor kopplat till begreppet bråk. Storleksjämförelser, aritmetik, omvandling och densitet är viktiga förmågor för att utveckla en holistisk förståelse inom begreppet (Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015; Wang & Siegler 2023; DeWolf, Bassok och Holyoak 2015; Torbeyns, Schneider, Xin et al. 2015; Rojo, King, Gersib et al. 2023). Enligt Wang och Siegler (2023) verkar det vara svårare att utveckla en god förståelse inom bråk än vad det visar sig vara för andra områden som till exempel decimaltal. Att skapa förutsättningar för att eleverna får träna upp förmågor inom samtliga fyra områden visar sig avgörande för att eleverna kunna se rationella tals specifika karaktäristiska egenskaper. Det är av stor vikt då många elever applicera heltals principer vid mötet med bråktal vilket leder till misstag. Forskningen framhäver att eleverna behöver i stället utveckla förståelse om täljaren och nämnarens relationer och egenskaper vilket enligt forskningen bör göras genom att variera infallsvinklar och metoder kopplat till de fyra olika kategorierna. Till skillnad från motsvarande uppgifter med heltal. Tydligast var dock att förståelse inom bråk, inte bara magnituder utan även de relationella aspekterna av bråkförståelse, är en förutsägelse för prestationer inom algebra. Studien fastslår att utvärderingen av dessa två grundläggande förmågor, tillförlitligt kan förutspå framtida algebraiska prestationer.

Rinne, Ye och Jordan (2017) forskning utgår också från bråktals relationella aspekter och magnituder för att undersöka elevers utveckling och applikation av strategier. I studien utvecklade endast 55% av eleverna normativa strategier som är nödvändiga för att göra lyckade beräkningar med bråktal utefter förväntad ålder. I början av fjärde klass, före undervisningen inom bråkaritmetik, har oftast eleverna en förenklad bild av bråkmagnituder där de två felaktiga strategier dominerar, "whole number bias" (vanligast) och "Small number bias". Eleverna som använde sig av den sistnämnda strategin tenderade att i större utsträckning nå den normativa jämförelsestrategin. När eleverna sedan undervisas inom bråk börjar deras strategier utvecklas och röra sig från Whole number bias till antingen Small number bias eller till den normativa strategin. Elever som inte lyckas göra denna övergång innan våren i årskurs fem visar sig vara de elever som i längden har svårt att utveckla förståelse för bråk. Exempelvis så var fortfarande 25% respektive 20% av eleverna i årskurs sex kvar i Whole number bias- och Small number biasstrategierna. Forskarna gör antagandet att dessa elever förmodligen inte kommer kunna byta strategi utan intervention. Torbeyns, Schneider, Xin et al. (2015) studie konstaterar att, likt Rinne, Ye och Jordan (2017) och Wang och Siegler (2023), förståelse av bråkmagnituder har direkt koppling till elevers matematikprestationer. Forskningen visar det starka sambandet mellan förståelse av bråkmagnituder och matematikprestation kan tolkas som en generell kognitiv egenskap hos alla elever, snarare än kulturellt betingade. Dock poängterar forskarna att denna förmåga inte är medfödd eller endast beror på elevernas intellektuella förmåga. Lärarens undervisning och potentiella interventioner spelar en betydande roll för elevers utveckling.

3.4 Strategier för förståelse inom bråk

Utifrån tidigare forskning har vi kunnat urskilja svårigheter som är förknippade med förståelse inom bråk. Därtill framför forskningen vilka strategier som visat sig lyckosamma för att motverka dessa svårigheter samt bidragit till att främja kunskapsutveckling inom området. Lortie-Forgues, Tian och Siegler (2015) forskning redogör för sju olika inbyggda svårigheter i bråkaritmetik. Svårigheterna involverar bråktalens notation, tillgänglighet (förståelse) för bråkstorlekar, ogenomskinlighet för aritmetiska standardförfaranden för bråktal, komplexa relationer mellan aritmetiska förfaranden för rationellatal och heltal, komplexa aritmetiska procedurer och relationer mellan aritmetiska procedurer för rationella tal till varandra, motsatt riktning av effekterna av att multiplicera och dividera positiva bråktal under och över ett, och det rena antalet distinkta komponenter i bråkaritmetiska procedurer. Lärarens ämneskunskaper lyft fram i forskningen som en viktig komponent för elevers utveckling och förmågan att lära ut för att överkomma ovannämnda svårigheter inom bråk, ses som en framgångsfaktor (Copur-Gencturk 2021). Forskningen lyfter även begreppen “whole number bias” och “small number bias” vilket innebär att eleverna felaktigt applicerar heltalsprinciper till operationer med bråk. Exempelvis att elever förstår att en lägre siffra kan representera ett större värde som att $1/3$ är större än $1/4$, men gör misstaget att $5/7$ är större än $6/7$ (Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015; Rinne, Ye & Jordan 2017). För att motverka förankringen av dessa felaktiga strategier och för att stötta eleverna att övergå till normativa lyckosamma strategier lyfts flera aspekter. Förkunskap och interventioner visar forskningen vara de centrala aspekterna för att få elever att överge dessa felaktiga strategier (Rinne, Ye & Jordan 2017).

Tidigare forskning framför ytterligare en strategi som visat sig ha positiv effekt för elevers förståelse av bråk är storleksjämförelse, genom aktiviteter som krävde att eleverna lärde sig att representera, jämföra, ordna och lokalisera bråk på tallinjer (Rojo, King, Gersib et al. 2023, Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015, Rinne, Ye & Jordan 2017). Aktiviteterna ökade både förståelsen för “at-risk” elever och för elever i kontrollgrupperna, vilket påvisar en bred effekt som kan appliceras på hela klasser (Rojo, King, Gersib et al. 2023, Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015, Rinne, Ye & Jordan 2017). En annan strategi för lärande som lyfts i forskningen inom rationella tal är att uträkningar inom begreppet till en början alltid utgår ifrån ett uttalat antal i form av enheter och att eleverna lär sig att uppskatta och placera ut 25%, 50% och 75% på en tallinje av den valda enheten. Exempelvis för att bestämma vad 75% är av en behållare som rymmer 900ml ska eleverna först lära sig att peka ut vart på tallinjen 50% är, sedan 25% för att ta reda på vad 75% är. Forskningen belyser att denna strategi visade sig öka elevers prestationer vid aritmetiska uträkningar av rationella tal (Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015).

Forskning visar att en grundläggande förståelse för rationella tal bygger på att samtliga förmågor inom rationella tal (magnituder, aritmetik, omvandling och densitet) undervisas, för vidare utveckling inom matematikområdet algebra (Rojo, King, Gersib et al. 2023). Interventioner bör alltså formas för att utveckla samtliga förmågor och undervisa eleverna i att kunna operera med och sinsemellan olika rationella tal. En strategi för att förbereda eleverna för algebra är alltså att utveckla elevers kunskaper inom rationella tal och att lägga tid på de delar som enligt forskning är mindre framstående, alltså omvandling och densitet (Rojo, King, Gersib et al. 2023):

Proficiency with rational number concepts and skills is a fundamental requirement for succeeding in algebra-related courses. Therefore, interventions must focus on 18 methods for preparing students with MD to master skills related to algebra, such as magnitude, arithmetic, translation, and density of rational numbers". (Rojo, King, Gersib et al. 2023 s. 234).

Siegler, Thompson och Schneider (2011) menar att flertalet elever applicerar felaktiga strategier vid multiplikation och division av bråk. Relationen mellan nämnaren och täljarna är ofta inte helt utvecklade vilket leder till felaktiga val vid uträkning av dessa tal, exempelvis att likt addition så försöker eleverna omvandla nämnaren så båda talens nämnare är desamma för att sedan utföra multiplikationen. Vidare belyser forskningen att val av strategier är i direkt korrelation till elevernas resultat i form av precision och uträkningshastighet samt att elevers olika strategier kopplat till bråk är betydligt fler än de som används vid uträkningar med heltal (Siegler, Thompson & Schneider 2011). Lortie-Forgues, Tian och Siegler (2015) forskning kring utveckling av bråkaritmetik visade att elever ofta blandar ihop räkneoperationerna vid uträkning av bråk i de olika räknesätten, vilket resulterade i inkorrekta svar. Uträkning av tal med olika antal decimaler visade sig också vara utmanande. Medan Lortie-Forgues, Tian och Siegler's (2015) forskning lyfter elevers svårigheter med bråk och framhäver Florens, Hinton och Meyer's (2018) forskning att undervisningsstrategier har betydelse för elevers kunskapsutveckling.

Butler et al.'s results and current results support the benefit of using concrete instruction because students who received concrete instruction performed better (Florens, Hinton & Meyer 2018 s. 173).

Florens, Hinton och Meyer (2018) citat ovan syftar till att understryka vikten av användning av konkreta material i undervisningen för ökad kunskapsinläring. Generellt använder pedagoger "business as usual"- undervisning som inte innefattar konkreta material, utan förlitar sig på att elever förstår och klarar av att endast arbeta utifrån instruktioner. Laborativt material i undervisningen hjälper till att förtydliga och fördjupa elevernas kunskaper men även skapar möjligheter att bygga vidare sin förståelse.

3.5 Learning study

Learning study utvecklades under de tidigare åren på 2000-talet som en möjlig modell för forskning och lärarfortbildning. Det som skiljer en learning study från en lesson study är att en learning study tar sin utgångspunkt i teorier om lärande samt fördjupa sig i att upptäcka och behandla centrala lärandeobjekt, snarare än att ta sikte på undervisningens utformande (Bergqvist & Echevarría 2011). I metoden används variationsteorin som verktyg för att identifiera viktiga kritiska aspekter av innehållet som eleverna behöver urskilja för att ta till sig ny kunskap (Holmqvist 2006). I en lesson study däremot, ligger större vikt på att förbättra och förändra undervisningsinnehåll och lärarnas pedagogiska undervisningsmetoder (Runesson 2004).

Forskningen lyfter att learning study är en kollektiv process där lärare i samarbete med forskare systematiskt och cykliskt planerar, reflekterar, utvärderar, omprövar lektioner och bedömer möjligheten till lärande utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv (Bergqvist och Echevarría

2011). Vidare framhäver de att i en learning study finns det centrala återkommande moment under studiens struktur som att genomföra förtest av elever, analys av förtest, planering av lektion, genomförande av lektion och använda videoinspelningar för att analysera och följa upp elevernas utveckling efter lektionerna.

Tidigare forskning framhäver att Learning study inte endast utvecklar och förbättrar elevernas lärande utan fungerar därtill som ett forum för lärande för både pedagoger och forskare (Thorsten 2015; Lo & Marton 2012; Bergqvist & Echevarría 2011; Ling 2014; Runesson 2004). Forskningen indikerar att lärarens individuella förmåga att urskilja kritiska egenskaper inom ett lärandeobjekt ökar, och att detta i sin tur relaterar till elevernas förmåga att inhämta kunskap. Den pedagogiska utvecklingen gällande att tillföra elever ett lärandeobjekt frångår från en mer generell upptagande av lärandeobjekt till ett mer specifikt innehållsrelaterat sätt, vilket kan främja ett fördjupande lärande (Holmqvist 2011). Mårtensson (2019) lyfter i sin studie att lärarens kunskap om pedagogiskt innehåll och undervisningsmetoder sammansmälter till en integrerad förståelse mellan pedagogisk och ämnesmässig kunskap. Vilket innebär att pedagogerna utvecklar en förmåga att strukturera och anpassa undervisningen utefter elevernas varierande inlärningsbehov. Detta kan leda till en förbättrad undervisningseffektivitet och därtill främja elevernas lärande. Forskningen poängterar betydelsen av learning study för pedagogernas yrkesutveckling, där särskilt fokus ligger på hur lärare genom learning study kan utveckla en djupare och mer nyanserad förståelse av kritiska aspekter för elevens kunskapsutveckling (Mårtensson 2019).

Forskningen menar att learning study bidrar till att utveckla förmågan att urskilja kritiska aspekter på ett mer specifikt sätt (Thorsten 2017; Holmqvist 2011; Lo & Marton 2012). För att kunna upptäcka och behandla kritiska aspekter används flertal tillvägagångssätt. Genom diskussion, analysarbete och reflektion söker pedagoger och forskare utvecklingspunkter i undervisningsinnehållet för att främja lärandet. Vidare lyfts det i forskning att det teoretiska ramverket, variationsteorin, är det centrala bidraget till att styra fokuset mot själva lärandet (Bergqvist & Echevarría 2011; Lo & Marton 2012). Genom att erbjuda en teoretisk grund, hjälper variationsteorin till att förstå och identifiera de kritiska aspekterna som behöver behandlas för att nå ett effektivt lärande (Thorsten 2015). Vidare framhävs det att lärandeobjektet utgörs av vad som kallas för kritiska aspekter, vilket syftar till de delar eleverna måste identifiera för att utveckla förståelse av specifika aspekter för att befästa lärandeobjektet. Mårtensson (2019) framhäver vikten av learning study för lärarens professionella yrkesutveckling, särskilt i hur de kan fördjupa sin förståelse för kritiska aspekter. Genom att arbeta med och analysera kritiska aspekter av lärandeobjekt, utvecklar lärarna en djupare och nyanserad förståelse av de specifika lärandefaktorer som stödjer och förbättrar elevernas lärande. Vidare lyfter Mårtensson (2019) att lärardiskussioner och fördjupning av kritiska aspekter är en förutsättning för en ökad pedagogisk kunskapsutveckling. Dock framkommer det lärare har svårigheter med att upptäcka och behandla kritiska aspekter av lärandeobjektet (Lo 2014). Pedagoger tar ofta även kritiska egenskaper för givna vilket medverkar till att de inte behandlas eller synliggörs i undervisningen. Det kan leda till att eleverna inte får möjligheten att utveckla sitt lärande eller befäster felaktiga strategier (Lo 2014).

Likt tidigare forskning (se Thorsten 2015) påpekar Wernberg (2006) att de kritiska aspekterna är de aspekter i lärandeobjektet som eleverna ges möjlighet att upptäcka för att möjliggöra en ökad förståelse av lärandeobjektet. Variationsteorin i en learning study ger ett strukturerat

ramverk som bistår läraren med att fatta genomtänkta adekvata pedagogiska beslut med fokus på innehållet, vilket kan leda till en förbättrad undervisning och främja elevernas förståelse (Lo och Marton 2012).

3.6 Tidigare forskning i relation till denna studie

Tidigare forskning belyser strategier och representationsmedel som verkar för att öka inläring om bråk, som att exempelvis använda tallinjen vid storleksjämförelse av bråktal ((Rojo, King, Gersib et al. 2023, Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015, Rinne, Ye & Jordan 2017). Dock lyfter inte forskningen explicit hur läraren kan applicera dessa i den dagliga undervisningen. Forskningen lyfter även felaktiga strategier som elever tillämpar kopplat till bråktal där de ser bråktal utifrån ett heltalsperspektiv (Rinne, Ye och Jordan, 2017). Därtill trycker Thorsten (2017) med flera att learning studys hjälper läraren att urskilja kritiska aspekter kopplat till innehållet som är nödvändigt för att utveckla en fullständig förståelse, vilket ökar lärandet och minskar vanliga missuppfattningar. I både forskning kring learning studies och bråk och decimaltal lyfts vikten av elevdiskussioner kopplade kring innehållet samt lärarens ämneskunskaper som viktiga faktorer för elevers lärande (Fuchs, Schumacher, Long et al., 2013; Copur-Gencturk, 2021; Wang och Siegler, 2023). Interventioner eller stöd i form av effektiva strategier lyfts som en viktig metod för att förbättra elevers utveckling inom bråk och resultatet visar att när undervisningen riktar fokus på hur eleven förstår innehållet ökar förståelsen (Rinne, Ye & Jordan 2017). Learning study med variationsteorin som ansats bygger på en struktur som utgår från elevens tolkning av innehållet och vilka kritiska drag eller aspekter som eleven ännu inte lyckats identifiera samt hur innehållet kan varieras för att skapa förståelse (Thorsten 2015; Lo & Marton 2012; Bergqvist & Echevarría 2011; Ling 2014; Runesson 2004). Metoden kan ses som en riktad intervention eller ett stöd som delvis byggs utefter elevens egna tolkningar av innehållet. Sammanställningen av forskningen visar enighet med att fokus bör riktas mot innehållet och elevers uppfattning för att motverka felaktig inläring och stärka elevers lärande.

Forskningen visar även att det finns en kunskapslucka kring vilka kritiska aspekter elever behöver identifiera för att kunna storleksordna och jämföra bråktal dock främst hur undervisningen bör utformas för att belysa dessa kritiska aspekter utifrån ett lärarperspektiv (Thorsten 2015; Thorsten 2017). Dock belyser inte forskningen elevperspektivet. Utifrån detta är det således av intresse att med hjälp av en learning study med variationsteorin som ansats undersöka vilka strategier och representationsformer som ökar elevers förmåga att storleksordna och jämföra bråktal samt hur undervisningen bör utformas och därmed bidra till ny kunskap inom området. Både ur ett lärarperspektiv och elevperspektiv.

4. TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER

I följande kapitel kommer vi att först behandla studiens teoretiska utgångspunkt därefter studiens metod och material och en presentation av urvalskriterierna. Avsnittet redogör därtill för en ingående beskrivning om studiens genomförande, analysprocessens tillvägagångsätt lektionsdesign, forskningsetik. Kapitlet avslutas sedan med en reflektion av val av metod.

4.1 Variationsteorin

I denna studie har vi uteslutande använt oss av variationsteorin som ansats för att besvara frågeställningar och syfte. Dock inleds detta kapitel med att redogöra för teorins historia och bakgrund.

Variationsteorin som används i denna undersökning härstammar ifrån forskning om lärande och omvärldsuppfattningar vid Göteborgs universitet, inom en forskningsansats som utvecklades där av Ference Marton och kollegor som Roger Säljö, Lars-Ove Dahlgren och andra under benämningen fenomenografi (Hajar, 2020; Svensson, 1997). Runesson (2010) framhäver att syftet med fenomenografi handlar om att utforska hur olika individer uppfattar ett fenomen i specifika sammanhang. Genom att analysera och identifiera fenomen inom en viss kontext, belyser fenomenografisk forskning olika aspekter att uppfatta samma företeelse. Likt Runesson (2010) förklarar Marton och Booth (2000) att fenomenografien utgår från att skilda olika kvalitativa sätt att erfara olika fenomen och att identifiera på vilket sätt något kan erfaras. Fenomenografien kan således förklaras så som att den i grunden har ett intresse för att åskådliggöra fenomen i världen såsom andra betraktar dem, samt att avtäcka och beskriva variationer i det avseendet, framför allt i en pedagogisk kontext (Marton & Booth 2000).

Variationsteorin som används i vår studie härstammar från fenomenografien men i stället för att inrikta sig på människors uppfattning kopplat till olika fenomen riktas fokus kring ett så kallat *lärandeobjekt*. Utgångspunkten i variationsteorin är lärandeobjektet och de aspekter som är avgörande för att utveckla förståelse för objektet, dessa kallas för *kritiska aspekter* (Ling 2014). Det är aspekter som ännu inte är inlärd av eleverna men som är avgörande för att förstå lärandeobjektet. Definition av lärandet understryks inom variationsteorin som en förändring, en förändring i hur vi uppfattar något, erfara något eller förstår något (Runesson 2010). Enligt variationsteorin kan kunskap kring lärandeobjektet endast uppfattas genom att vi lyfter objektet ut från den kontext den befinner sig i. Med andra ord kan vi lättare urskilja objekt som sticker ut från mängden eller bakgrunden. Genom att variera kritiska aspekter mot en konstant bakgrund kan vi stegvis uppfatta de delar som är avgörande för att uppnå lärande (Magnusson & Maunula 2011). Med begreppet *separation* lyfts utmärkande delar av den kritiska aspekten ut från helheten för att varieras mot en konstant bakgrund, separation kan skapas genom *kontrast* eller *generalisering* och med hjälp av *fusion* förs de kritiska aspekterna samman. Kontrast inom variationsteorin innebär att för eleven ska kunna urskilja ett specifikt innehåll måste även innehållet ställas i kontrast mot vad det inte är, d.v.s. Vad som skiljer de olika objekten från varandra vilket möjliggör att eleven kan definiera de specifika särdragen för att identifiera den kritiska aspekten. Generalisering betyder att objektet förblir desamma men sammanhanget varieras, ta exempelvis objektet tänd lampa, vi kan variera tänd lampa som ett ljus, oljelampa, LED lampa, strålkastare osv. Objektet förblir detsamma men genom att variera med olika former skapas en djupare förståelse för vad objektet är samt tydliggör de kritiska dragen hos en tänd lampa. Genom att dela objektet från helheten kan olika variationsmönster skapas som leder fram till förståelse av den kritiska aspekten. Om flera kritiska aspekter varieras samtidigt blir det svårare för mottagaren att urskilja aspekterna då de kan smälta samman (Lo, 2014). Till sist kan samtliga aspekter som separerats från helheten varieras tillsammans för att belysa förhållandet till varandra, detta kallas för fusion vilket innebär en simultan variation av objektets eller fenomenets olika dimensioner vilket motsvarar de kritiska aspekterna hos lärandeobjektet (Lo 2014; Magnusson & Maunula 2011). För att göra lärandeobjektet tillgängligt för eleverna måste läraren skapa dessa variationsmönster som hjälper barnen att urskilja både de kritiska dragen och aspekterna för objektet (Ling 2014). Mårtensson (2019)

menar att ur ett variationsteoretiskt perspektiv är lärandet alltid inställt på något som ska läras. Lärandet innebär att en person kan uppfatta något på ett nytt och kvalitativt sätt som individen tidigare inte uppmärksammat.

Ledande för denna teoretiska position är framför allt att pedagogen på något sätt behöver erfara det som lärs. Lo och Marton (2012) lyfter att variationsteorin främsta bidragande till learning study är att den riktar uppmärksamhet till det aktuella lärandeobjektet och tillhandahåller en teoretisk förankring för att förstå de kritiska förutsättningarna för lärande. Holmqvist (2006) förklarar variationsteoretiskt perspektiv på lärandet som att det är icke-dualistiskt. Genom erfarenhet och egna uppfattningar av ett fenomen, har varje enskild individ ett unikt sätt att se på fenomenet. Lärandet innebär att erfara omvärlden på nytt sätt och att varje enskild individ har ett eget sätt att se det på (Holmqvist 2006). Variationsteorin bygger på att lärandet sker med hjälp av att urskilja nya aspekter. Att ta till sig ny kunskaps innebär att en person ser saker genom nya perspektiv och för att förstå vad något är behöver vi också veta vad det inte är. Forskningen lyfter att implementering av variationsteorin i undervisningen kan möjliggöra lärares inverkan på elevernas sätt att uppleva ett fenomen, vilket kan bidra med att elever får en djupare och mångsidig förståelse av lärandeobjektet (Tan 2009: Runesson 2010: Thorsten 2015). För läraren innebär det att kunna identifiera och strukturera aspekterna med hjälp av variation och invariants så att eleverna får möjlighet att urskilja kritiska aspekterna snarare än att upplysa och informera om dem (Mårtensson 2019). Teorins centrala begrepp riktar fokus på grundläggande förutsättningar som är kritiska för lärandet och metodval utgår från användandet av begreppen för att framhäva de kritiska aspekterna (Thorsten 2015). Den aktuella studien tar sin utgångspunkt i att det är lärandeobjekt som är i fokus. Vi avser att mer specifikt studera hur hanterandet av lärandeobjektet utifrån variationsteoretiska begrepp påverkar lärandet.

4.2 Metod och material

Metoden som använts i studien är learning study med variationsteorin som utgångspunkt där systematisk planering och utvärdering av matematikundervisningen gjordes i tre steg. Studien har genomförts av två lärarstudenter i samarbete med två yrkesverksamma lärare i analysarbetet och omfattade tre klasser i årskurs fyra. Studien genomfördes under höstterminen 2024 på en svensk grundskola.

4.2.1 Urval

För att undersöka hur matematikundervisning bör utformas för att elever ska utveckla förståelse för bråktaal studerades tre klasser i årskurs fyra. Varje klass bestod av mellan 23-25 elever. Lärarna som deltog i studien har blivit tillfrågade att delta utifrån deras roll i respektive klass och tackade ja då de uttryckte ett intresse av att medverka. En lärare är klasslärare i en av de tre klasserna som deltar i studien. De två återstående klasserna har vi som genomför studien ansvaret som klasslärare på 20% arbetstid, fram tills vår examen då anställningen övergår till 100% tjänster. Valet av elevgrupp bygger dels på tillgång av underlag utifrån att vi arbetar i klasserna vilket underlättar vid planering och genomförande, dels att studiens tänkta innehåll är lämpligt att behandla för aktuell årskurs utifrån läroplanen (Lgr 22). Läraren som är klasslärare för sin klass har varit verksam i strax under ett år och läraren som är tillfälligt i klassen har varit verksam i två år. Eleverna som medverkar i studien har fått vårdnadshavares tillstånd och frivillighet att delta har förklarats ingående för både elever och vårdnadshavare. Skolan där studien genomförts är belägen i en mindre svenska stad och studien genomfördes under höstterminen 2024.

Urvalskriterier för studien utgår därav från de valda elevgrupperna, alltså eleven måste ha en tillhörighet i någon av de tre klasserna. Även att respondenterna måste medverka på samtliga delar i studien, således blev eleverna exkluderade om de inte deltog på förtest, lektion och eftertest. Det sista urvalskriteriet är godkännande från elevernas vårdnadshavare som verifierades i form av samtyckesblanketter.

4.2.2 Studiens genomförande

I följande avsnitt beskrivs tillvägagångssättet för studiens genomförande detaljerat, där metoder och moment presenteras i syfte att ge en tydlig bild av arbetsprocessens gång. Avsnittet redogör för praktiska moment som utförts, lika så presenteras strategiska val som har gjorts samt hur insamlingen och analysen av data har gått tillväga för att säkerställa studiens tillförlighet och relevans.

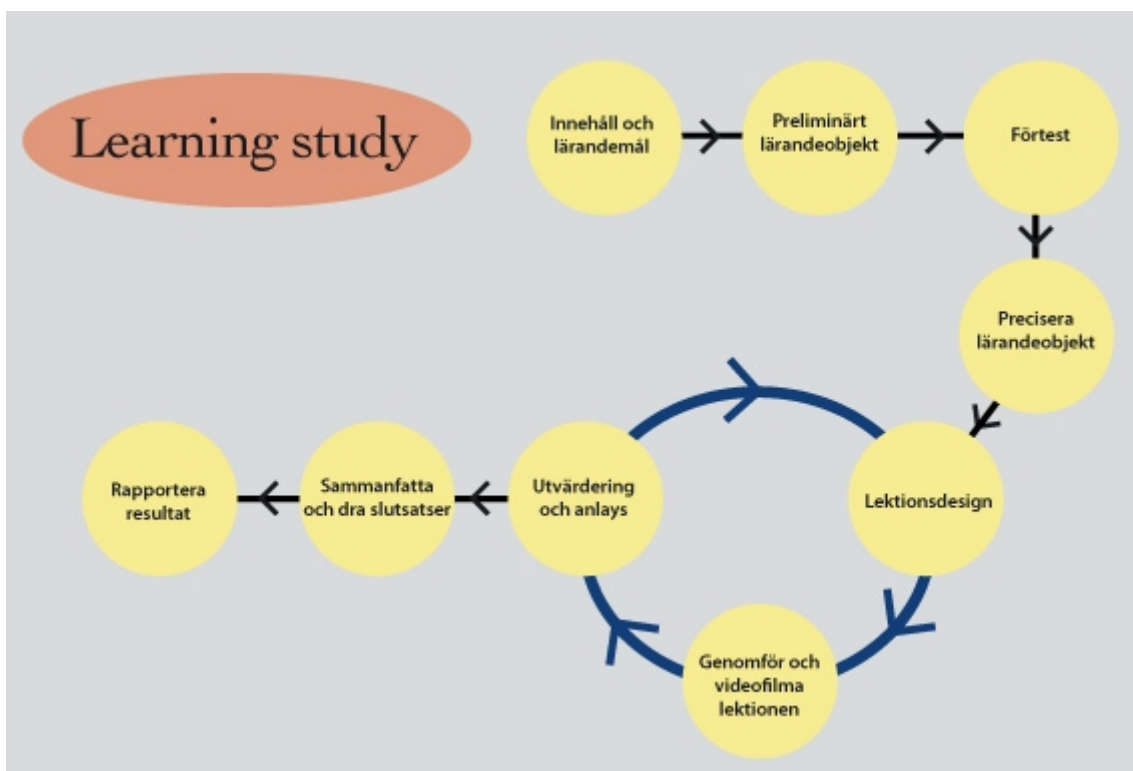
Inför genomförandet av studien gjordes ett systematiskt förarbete för att belysa vad enligt forskningen utgör svårigheter för elever vid inläring av bråktal, vilka strategier som elever tillämpar sig samt effektiva metoder för att utveckla taluppfattning med bråktal. Val av metod i form av Learning study gjordes i samråd med vår handledare. Bergqvist & Echevarría (2011) trycker på vikten av handledarens roll inför tillämpning av metoden. Då vi inte har haft tillgång till en specifik handledare för just metoden Learning study och då det är vårt första genomförande, har omfattande litteratur och studier läst och analyserats inför forskningen. Inspiration togs från Drageryd, Erdtman, Persson & Kilhamns (2011) studie där fokus låg på att storleksordna tal i bråkform. Studien undersökte tallinjens effekt vid storleksordning och jämförelse av bråk, en modell som även vår kartläggning av forskning visar vara gynnsam för lärande. En väsentlig skillnad var att deras studie utgick från elevgrupp som var äldre och som då har mer erfarenhet av undervisning inom bråk. Anpassningar till elevgruppens ålder fick då göras vid planering av lektionsupplägg och genomförande.

Variationsteorin verkade för samt genomsyrade så väl lektionsupplägg som vid revidering och analysarbete. Med hjälp av teori synliggjordes de variationsmönster som var ämnade att bidra till elevers lärande. Kartläggning av tidigare forskning tillsammans med deltagande lärares erfarenheter och kunskaper inom matematikområdet kopplades samman med variationsteorin, vilket verkade som pedagogiskt verktyg för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna samt ge en indikation på vilka de nödvändiga förutsättningarna är för lärande. Hypotetiska kritiska aspekter togs fram genom att utgå från tidigare forskning (Drageryd, Erdtman, Persson & Kilhamns 2011). Studiens cykliska arbetsgång består av tre delar, ett förtest som samtliga elever genomförde innan planering av innehåll, en lektion som reviderades stegvis utefter resultat från eftertestet från föregående grupp (förutom den första lektionen) samt analys av inspelad film av själva lektionstillfället och ett efter-test. Vid analys av för-test togs ett första lärandeobjekt fram. Ett lärandeobjekt skiljer sig från de vanligt framtagna mål vi utgår från vid undervisning utefter läroplanen.

Lärandeobjektet fokuserar på i innehållet i detalj och vilka förmågor vi avser att eleverna tillämpar sig. Vidare är mål ofta mer generella och statiska medan lärandeobjektet utgår från den specifika gruppen och kan förändras utefter studiens gång (Magnusson & Maunula 2011). Lärandeobjektet för den aktuella studien formades innan förtestet men bearbetades vid analys av förtestet för att anpassas till elevgruppen, efter analysen fastslogs att storleksordna och jämföra bråktal som lärandeobjekt. Då variationsteorin tillämpades som ramverk genom studien

utgick vi från teorins centrala begrepp, separation, kontrast, generalisering och fusion som belyser hur kunskapsinhämtning uppstår samt hur variationsmönster kan skapas för att tydliggöra lärandeobjektet.

Vid utformandet av förtestet utgick vi från Diamantdiagnoserna (Ncm.gu.se) då vi ansåg att de behandlade en stor andel av de hypotetiska kritiska aspekterna. Vi kompletterade diagnosen med ytterligare uppgifter för att täcka samtliga förmågor som rymdes inom det potentiella lärandeobjektet samt tog bort innehåll som vi ansåg ligga utanför det område vi hade för avsikt att studera. Vi valde att göra omfånget för testet bredare för att dels kunna utesluta vissa kritiska aspekter, dels att efter analys lättare smalna av lärandeobjektet för att det inte ska bli för omfattande (Häggström, Bergqvist, Hansson et. Al 2012). Vidare förklarar forskarna att för- och eftertestet kan vara identiska alternativt att de delar som inte ingår i lärandeobjektet tas bort. Vi valde dock att göra två identiska test då vi ansåg det intressant att se hur hela resultatet påverkades av vår undervisning. Även uthållighet och koncentrationen påverkar hur eleverna svarar och vi ansåg att två olika test inte ger samma tillförlitlighet, däremot valde vi att endast analysera de frågor som behandlar de kritiska aspekterna i omfånget för den här studien. I arbetet med analys av förtest sammanställde vi varje enskild elevs resultat genom en summativ bedömning. Förtesten rättades endast utifrån korrekt angivet svar och max poäng för testet var 33 poäng. I arbetet med att sammanställa elevernas resultat gjordes med hjälp av Excell där siffrorna 0,1,2 användes som bedömningsresultat av utförda uppgifter. Vid fel svar fick eleverna 0 poäng och 1 poäng för uppgifter som endast gav ett poäng och svaret var korrekt. Siffran 2 användes vid rätt angivet svar i uppgifter med flersvarsalternativ där två poäng var möjliga. Samtliga för- och eftertest rättades tillsammans av forskarna med avsikten att få en likvärdig bedömning. Denna strategi användes även i sammanställningen i Excell, en forskare berättade muntligt poängen 0,1 eller 2 och den andra förde in resultaten. Bilden nedan illustrerar den cykliska processen som learning studies och den aktuella studien bygger på.



Bilden beskriver den cykliska processen för learning study där vissa delar återkommer för att systematiskt utvärdera och planera det innehåll som ansatsen har för avsikt att studera. (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2012)

4.2.3 Analysprocess

Analysarbetet har utförts med variationsteorin som ramverk och för att kunna fastställa vilket innehåll som eleverna faktiskt kunnat urskilja delades arbetet upp i tre områden. En statistisk strukturerad utvärdering av elevernas resultat, analys av inspelad lektion och observationer som dokumenterats av lärare under lektionstillfället. Samtliga moment har analyserats genom gedigna diskussioner med fokus kring hur eleverna har urskilt de kritiska aspekterna, hur eleverna konstruerar den förmodade kunskapen samt vilka variationsmönster som visade sig vara effektiva för den aktuella elevgruppen (Lo 2011). Observationer under lektioner antecknades av både forskaren och läraren och togs sedan med till analysarbetet där en sammanställning gjordes. Analysen av den inspelade lektionen gjordes genom att båda forskarna tillsammans först kollade på inspelningen i sin helhet. I samband med detta utförde vi individuella anteckningar som sedan sammanställdes och diskuterades med utifrån de variationsteoretiska mönstren *separation*, *kontrast*, *generalisering* och *fusion* samt hur vi lyckades uppnå dessa. Efter varje cykel analyserades skillnaden i medelvärde samt individuella uppgifter mellan för- och eftertestresultaten för att identifiera områden där eleverna hade gjort framsteg alternativt där resultaten försämrats. Resultaten ställdes mot analysen av observationen samt videoanalysen för att skapa en förståelse för hur eleverna lyckades identifiera de kritiska aspekterna. Lektionerna analyserades sedan med fokus på hur lärandeobjektet och hur de kritiska aspekterna framträdde utifrån variationsmönster, samt om andra kritiska aspekter uppstod än de som identifierats i förtestet. Inga nya kritiska aspekter identifierades på detta sätt. Däremot gjordes revideringar av lektionsdesignen efter varje lektion för att bättre synliggöra de kritiska aspekterna (Bergqvist och Echevarría 2011: Häggström, Bergqvist, Hansson et. al 2012). Denna struktur användes för samtliga analyser av vid de tre olika lärandecyklerna i vår learning study. Analysen har sedan legat till grund för det didaktiska utformandet av nästkommande lektionstillfälle.

En avgränsning i studien är att vi har valt att inte genomföra några intervjuer med elever för att ta reda på hur de har uppfattat lärandeobjektet och tagit till sig innehållet. Anledningen är att det inte har varit möjligt utifrån aktuell tidsram och valet blev i stället att utgå från elevernas svar för att undersöka det eventuella lärandet. Ytterligare en avgränsning för studiens resultat är pedagogens utveckling och lärande, endast elevernas lärande är i fokus i resultatet. Metodens arbetsgång och teoretiska aspekter kan påverka hur läraren tänker kring sin egen undervisning och kan fördjupa förståelsen för vilken effekt de pedagogiska valen får och hur innehållet bör behandlas för att främja elevers lärande (Bergqvist 2011). Lärarnas potentiella utveckling och didaktiska reflektioner redogörs för i diskussionsavsnittet.

4.2.4 Planering av lektionsdesign

Lektionsupplägget strukturerades med utgångspunkt i variationsteorin samt tidigare forskning inom området. Syftet var att belysa de kritiska aspekter som identifierats med hjälp av förtestet. Vi eftersträvade att separera innehållet genom att skapa kontraster och generalisering som styrde elevernas uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna. Flera representationer användes,

med särskilt fokus på tallinjen som tidigare forskning visat vara effektivt (Rojo, King, Gersib et al. 2023; Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015; Rinne, Ye & Jordan 2017; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020), för att stödja elevernas förståelse av likvärdiga bråk och förmågan att jämföra och storleksordna bråktal. Eleverna fick även placera ut bråktal på tallinjen samt storleksordna bråktal utefter referenspunkterna mindre än en halv, mer än en halv men mindre än en hel och mer än en hel, likt Lortie Forgues, Tian & Siegler (2015) studie där de dock använde procent som referens. Lektionerna observerades av en forskare och spelades in med hjälp av Ipad som riktades mot tavlan. Genomförandet av lektionen gjordes av en medverkande forskare i studien samt en verksam lärare. Dagen efter eller några dagar efter lektionerna genomförde eleverna eftertestet för att utvärdera deras kunskapsutveckling.

4.2.5 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet innebär i vilken utsträckning ett mätinstrument kan återge samma eller liknande resultat vid upprepade mätningar (Eriksson-Barajas, Forsberg & Wengström 2013). Det finns olika sätt att diskutera reliabiliteten i en forskning så som mätinstrumentets replikerbarhet, tillförlitlighet och precision. I studien framgår en tydlig beskrivning av tillvägagångssättet i forskningsprocessen, vilket bidrar till en hög reliabilitet. Studien redogör noggrant för hur vi har producerat data, hur vi har behandlat empirin samt bearbetningen av den insamlade datan (Christoffersen och Johannessen 2015). Vidare tydliggörs analysprocessens tillvägagångssätt gällande den införskaffande empirin. Ett tecken på hög reliabilitet förknippas med att resultatet blir det samma vid upprepade mätning (Christoffersen & Johannessen 2015). För att uppnå en hög tillförlitlighet presenterar studien behandlingen av empirin, på vilket sätt datan används, sättet den samlas in på och hur de bearbetas (Christoffersen & Johannessen 2015), vilket vi presenterar i studien.

Innebörden av validitet grundar sig i mätningarnas relevans och med validitet avses ett instruments förmåga att mäta det som är avsett att mätas (Eriksson-Barajas, Forsberg och Wengström 2013). För att uppnå en god validitet är studien konsekvent designad för att besvara studiens syfte med hjälp av frågeställningarna och valet av teori är kopplat till studiens metod och genomförande (Christoffersen & Johannessen 2015). Genom att utgå från variationsteoretiska begrepp så som *separation*, *kontrast*, *generalisering* och *fusion* vid analys av empiriskt material har teorin genomsyrat studien och därmed ökat validiteten (Lo 2014). Validiteten har även stärkts genom en systematisk granskning av de inkluderade artiklarna med avsikt att avgöra dess relevans för vårt forskningsområde. Vidare har samtliga metoder och tillvägagångssätt i studien beskrivs genomgående och har redogjorts konsekvent, vilket ökar forskningsöversiktens pålitlighet och bidrar till transparens.

4.2.6 Etik

Vetenskapsrådet (2017) framhäver att inom forskning finns det vissa krav på ett etiskt förhållningssätt, vilket innefattar informationskravet, samtyckeskravet, Konfidentialitetskravet samt nyttjandekravet. Studien har tagit hänsyn till dessa fyra forskningsetiska principer genomgående under hela forskningsprocessen.

Informationskravet innehåller flera aspekter till exempel olika villkor så som att det är frivilligt att delta samt att avbryta sitt medverkande i studien. *Samtyckeskravet* handlar om att deltagare ger sitt medgivande att delta i studien. Eftersom denna studie omfattar barn under 18 år, krävs

vårdnadshavares underteckning för samtycke och gjordes genom samtyckesblanketter. *Konfidentialitetskravet* innefattar deltagarnas anonymitet och att innehållet i studien inte ska kunna spåras till specifika deltagare samt att deltagare inte ska skadas eller kränkas. Samtyckesblanketterna har lämnats till administrationen på Högskolan i Borås där obehöriga ej kan ta del av dem. Information kring medverkande eller annat insamlat material från studien får endast användas till vad studien har för avsikt att undersöka och inget annat, vilket tillfaller under *nyttjandekravet*.

Likt Vetenskapsrådet (2017) framför All European Academies (rev. 2018) också fyra principer att förhålla sig till gällande etik inom forskning nämligen tillförlitlighet, ärlighet, respekt och slutligen ansvarighet. För att säkerställa studiens kvalitet, avses tillförlitligheten i studien av forskningsdesignen, metod delen och analysen. Principen ärlighet framförs i forskningens resultatdel genom att öppet, rättvist, objektivt och fullständigt precisera vad forskningen kom fram till. Vidare har respekt behandlats i studien likt nämnt ovan med ytters försiktighet med deltagarnas medverkande, observationsanteckningar och videoinspelningar. Dessa etiska principer har sammantaget genomsyrat vårt etiska förhållningssätt gentemot studiens struktur, ansvarstagande och hur vi hanterat hela forskningsprocessen.

4.3 Reflektion av val av metod

Med hjälp av att learning study användes som metod i den aktuella studien kan detaljerade data ges över elevernas lärande utefter resultat av för- och eftertest och observationer i form av analys av lektioner (Lo 2014). Då eleverna genomförde samma för- och eftertest har vi tilltro till att elevernas prestationer övergripande överensstämmer med det förmodade lärande eller icke lärande kopplat till lärandeobjektet som lektionerna hade för avsikt att belysa. Vilket minskar den subjektiva tolkningen av elevers lärande. Detta sammantaget med den relativt stora elevgruppen som bestod av tre olika klasser i årskurs fyra med totalt 60 elever, kan studiens resultat även förväntas vara applicerbar utanför den aktuella elevgruppen. För att ytterligare belysa elevers lärande och hur de lyckats identifiera de kritiska aspekterna kan intervjuer hjälpa till att lyfta elevernas tankar, vilket kan leda till en fördjupad förståelse för hur de uppfattar det aktuella innehållet (Häggström, Bergqvist, Hansson et. al 2012). Vilket kan ses som en svaghet då tidsaspekten för studien avgjorde att detta inte var möjligt. I samband med lektionerna gjordes observationer av klasslärare och student för att bekräfta kritiska aspekter eller uppmärksamma eventuella förbisedda kritiska aspekter kopplade till lärandeobjektet. För att säkerställa att elever tagit till sig kunskaper samt att säkerställa att observatörer inte missar några andra framförda kritiska aspekter från elever, filmades lektionen med två Ipads.

För att göra det möjligt för eleven att urskilja de kritiska aspekterna är det centralt att de valda variationsmönstren behandlas med adekvata undervisningsstrategier (Lo 2014). Betydande tid har därav avsatts för att ta fram och undersöka vilka strategier som forskningen visar kan vara effektiva för att synliggöra de kritiska aspekterna. Som stöd vid både framtagandet och eftervarande analys av lämpliga strategier har variationsteorin fungerat som vägledning för att besluta om metoden lyckas visa de variationer som är nödvändig för att skapa lärande. Att just lokalisera kritiska aspekter kan utgöra en stor utmaning, framför allt när en learning study genomförs för första gången, och ofta tar läraren vissa kritiska drag förgivna då de inte är kritiska för enskilde läraren (Lo 2014; Häggström, Bergqvist, Hansson, 2012). Genom att utgå från elevers felaktiga svar kan ytterligare kritiska aspekter identifieras, det kan göras genom diskussioner där erfarenheter delas mellan de medverkande lärarna, via litteratur och genom att analysera tidigare genomförda learning studies. Deltagarna i vår studie saknar dock lång

erfarenhet inom ämnet vilket gjorde att vi vände oss till kurslitteratur inom matematik där erfarenheter kring elevers lärande redogörs grundligt samt att vi läste och analyserade liknande learning studies. Det gjorde att vi kände oss trygga med de hypotetiska kritiska aspekterna som sedan låg till grund för framtagandet av för- och eftertest.

5. RESULTAT

Resultatpresentationen har strukturerats upp utifrån de tre lektioneracykler som studien grundar sig på. Inom varje aktuell lektion framgår en systematisk redovisning gällande innehåll, struktur på arbetssätt samt belysningar av de kritiska aspekterna av lärandeobjekten. I kapitlets avslutande del sammanfattas resultatet.

- Vilka är de kritiska aspekterna vid undervisning om lärandeobjektet att storleksordna och jämföra bråktal för de aktuella elevgrupperna?
- Hur bör matematikundervisningen utformas för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna?
- Hur har elevernas lärande inom bråk utvecklats utifrån lärandeobjektet?

Den inledande processen för att konstruera en lektion inledes genom diskussion mellan klasslärare och forskare samt genom analysering av förtesten. Arbetet grundar sig i att identifiera kritiska aspekter som elever behöver urskilja och uppfatta för att skapa lärande. Diskussionerna tillsammans med analys av förtest låg till grund för framtagande av de kritiska aspekter som eleverna behöver kunna urskilja för att kunna tillgodogöra sig lärandeobjektet. Lärandeobjektet, med andra ord, är det som ska läras i den aktuella undervisningen med fokus på elevernas förmåga att kunna behandla bråk. Utifrån dessa processer fastställdes det att lärandeobjektet för studien var att storleksordna och jämföra bråktal.

5.1 Analys av förtest

Vid analys av förtest framkom följande kritiska aspekter täljaren och nämnarens betydelse, betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (Begreppen hel och halv), bråktal större än 1, betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (likvärdiga bråk), Bråk som del av olika helheter (olika representationsmedel) och bråktalets form. Den första kritiska aspekten om bråktalets form var endast kritisk för ungefär 30% av eleverna. Vi valde dock att inkludera den som introduktion i vår lektionsplanering för att aktivera förkunskaper för de elever som redan identifierat den kritiska aspekten. I genomsnitt lyckades 42% av eleverna att korrekt avgöra vilka bråktal som var störst vid jämförelse av bråktal och att placera ut bråktal på en tallinje vilket innehöll fyra olika bråktal där 45 % av eleverna klarade att placera $\frac{1}{2}$, 28% av eleverna klarade placera $\frac{1}{4}$, 30% klarade av att placera $\frac{1}{3}$ och 51% av eleverna klarade att placera $\frac{5}{6}$. Utefter dessa resultat konstaterade vi att eleverna inte tillfullo förstod täljaren och nämnarens betydelse. Elevernas resultat kopplat till uppgifter som behandlade relationen mellan täljaren och nämnaren delades upp i två kategorier, likvärdiga bråk och storleksordna bråktal utefter referenspunkter. På förtestet fick eleverna genomsnittligt 37% rätt på uppgifterna kring likvärdiga bråk och 20% rätt när de skulle placera ut bråktal utefter referenspunkter. Eleverna visade varierad förståelse för att lika bråktal kan representeras av olika, egentligen oändliga, tal

men ändå vara likvärdiga samt svag förmåga att placera ut bråktal utefter begreppen en halv och en hel.

Slutligen konstaterades att eleverna uppvisade vissa svårigheter i förståelsen av att bråktal kan utgå från och appliceras till olika objekt. Exempelvis klarade 95% av eleverna att skugga i $\frac{3}{5}$ delar av fem bollar, men endast 23% klarade att skugga $\frac{3}{4}$ av åtta bollar. Uppgifter som behandlade del av ett antal så kunde 95% av eleverna vad hälften av 12 var, men när mindre bråkdelar introducerades så som $\frac{1}{5}$ av 10 så svarade endast genomsnittligen 50% av eleverna rätt. När eleverna skulle dela och skugga en kvadrat, cirkel och parallelltrapets i $\frac{1}{3}$ del lyckades 50% dela upp kvadraten, 30% rätt på cirkeln och 13% rätt på parallelltrapetsen. Forskning belyser vikten av att behandla bråktalets storlek i relation till objektet samt betydelsen av att eleverna får möta olika representationsformer av bråktal för att skapa djupare förståelse för bråktal (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2020). Den sista kritiska aspekten utgörs därav av att kunna se bråk som del av olika helheter.

Kritiska aspekter	Varierar	konstant
Bråktalets form	Bråktal och heltal	Nämnare + täljaren
Täljarens och nämnarens betydelse	Täljaren	Nämnaren (+ allt annat)
Täljarens och nämnarens betydelse	Nämnaren	Täljaren (+ allt annat)
Bråktal större än 1	Täljare och nämnare byter plats	Samma siffror
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (Begreppen hel och halv)	Täljare och nämnare	Begreppen halv och hel Referenspunkter
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (likvärdiga bråk)	Täljare och nämnare	Bråktalets storlek
Bråk som del av olika helheter (olika representationsmedel)	Helhetens storlek och form	Bråkdelen

Variationsmönster framtagna utifrån analys av förtest.

När de kritiska aspekterna var identifierade skapades variationsmönster som utgick från kontrast, generalisering och fusion för att skapa separation vilket enligt variationsteorin möjliggör att eleverna kan identifiera den kritiska aspekten.

5.2 Lektion 1

För att skapa ett variationsmönster utefter täljarens betydelse utgick vi från begreppen kontrast och generalisering där täljarens betydelse behandlas genom att hålla täljarens värde konstant medan bakgrunden varierar. För att konkretisera innehållet utgick vi från pizzamodellen som delades i fyra delar. För att skapa kontrast av storleken på bråkdelen med konstant nämnare och varierande täljare delades pizzan först upp i olika stora delar. En helklassdiskussion genomfördes därefter för att belysa att samtliga delar måste vara lika stora för att det ska vara ett bråktal. Felet rättades tillsammans med eleverna och genomgången fortsatte när vi kommit överens om att delarna var lika stora. Vi placerade ut $\frac{1}{4}$ vid varje pizzabit och diskuterade täljarens och nämnarens betydelse. Gjorde kopplingen mellan en hel och hur många delar vi nu har av pizzan, alltså $\frac{4}{4}$. Sedan ställdes frågan vad som händer om vi äter upp $\frac{1}{4}$ av pizzan.

Eleverna fick svara i helklass och för att tydliggöra räknade vi delarna som fanns kvar, adderade delarna på tavlan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Vi pratade om varför endast täljaren adderas när vi räknar delarna, för att nämnaren endast beskriver hur många delar som något är uppdelat i, täljaren säger hur många delar som vi har. Sedan fortsatte vi på samma spår tills pizzan tog slut. Vid nästa moment introducerades tallinjen där diskussioner inledningsvis utgick från en tallinje med heltal för att skapa kontrast mellan heltal och bråktalet. Läraren poängterade skillnaden där bråktalen oftast placeras mellan heltalen på tallinjen. Sedan utgick vi från exemplet med pizzan och placerade ut delarna på en tallinje med redan utsatta markeringar. Vi placerade då ut rätt bråktalet vid varje markering. Vi skrev sedan upp talet $\frac{5}{4}$ på tavlan och bad eleverna fundera kring vart talet skulle kunna få plats på tallinjen. Detta för att belysa bråktalet som är större än en hel. Eleverna fyllde även i en egen tallinje på ett arbetsblad utifrån samma innehåll.

Därefter övergick vi till liknande variationsmönster fast där nämnaren varierades, täljaren och storleken på figuren behölls konstant. Eleverna fick i uppgift att färglägga tre lika stora kvadrater (Kvadraterna var även uppdelade i 2, 3 och 4 delar). Uppgiften bestod av flera delar, steg ett var att skugga $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$ på respektive kvadrat. Sedan ombads eleverna tillsammans med sin bänkkompis att besvara följande frågor:

- Vilken kvadrat har minst skuggad del?
- Vilken har störst skuggad del?
- Vad kan ni se för mönster om ni jämför figureerna?

Svaren diskuterades sedan i helklass där grupperna fick presentera sina slutsatser. De två första frågorna som behandlade storleken på bråkdelen som representerades av areamodellen gav endast två svar då det var tydligt vilken del som var störst respektive minst. Men när eleverna beskrev vilka mönster de kunde urskilja lyftes flera aspekter. Eleverna lyfter att delarna blir mindre och mindre och att det ökar med en del för varje figur. En elev riktar fokus på täljaren och nämnaren och beskriver att täljaren alltid är ett och nämnaren ökar. Då ställer läraren en följdfråga och redogörelsen finns i utdraget nedan.

Utdrag från klassrumsdiallog lektion 1:

Läraren: Okej, bra det stämmer. Händer det något med delarna? Ju fler gånger vi delar upp dom?

Elev 1: Det är fortfarande bara 1 del som är skuggad

Läraren: Ja det stämmer, men vad händer med delarna?

Elev 2: Delarna blir mindre.

Läraren: Exakt, ju fler gånger vi delar, ju mindre blir ju delarna.

Fokus riktades mot mönstret att ju större tal på nämnarens position, desto mindre blir delarna genom att skriva upp bråktalen på tavlan och poängtera skillnaden att även fast nämnaren blir större så blir bråket mindre. Efter helklassdiskussionen ritade vi upp samma kvadrat, med $\frac{1}{4}$

del skuggad på tavlan. Läraren drog sedan ett sträck genom mitten på kvadraten så vi fick 8 lika stora delar. Först ställdes frågan, hur många delar finns det nu? Därefter frågar läraren om den skuggade delen fortfarande är lika stor som innan? Läraren gör sedan ett medvetet misstag för att skapa kontrast, där de skuggade delarna räknas först och placeras på täljarens position och de delar som inte är skuggade placeras på nämnarens position, alltså $2/6$. Eleverna upptäcker felet och diskussion startas kring varför det är viktigt att räkna alla delar när vi skriver nämnaren. Vi jämför sedan $2/8$ med $1/4$ och pratar om relationen mellan täljaren och nämnaren samt varför de är lika stora tal (Likvärdiga bråk).

Sedan fick eleverna en uppgift att dela upp 8 godisar så det bara finns $3/4$ delar av godisarna kvar, där täljaren och nämnaren är konstanta men där separation skapas då bråkdelen varierar. Eleverna arbetade med konkret material och tillsammans med sin bänkkompis. Genom observationer samt genomgång av videomaterial lyfter flera elever att det inte går att dela godisarna i fjärdedelar för det är för många godisar, alltså mer än fyra. Eleverna fick sedan presentera hur de tänkte genom diskussion i helklass. En lösning presenterades sedan tillsammans på tavlan där fokus låg på att gruppera godisarna i fyra grupper där varje grupp bestod av två godisar.

Eleverna fick sedan arbeta med att placera bråktal vid rätt påstående där fokus låg på att befästa referenspunkterna, mindre än en halv, mer än en halv men mindre än en 1 (hel) och mer än en 1 (hel). Först två uppgifterna gjordes tillsammans för att modellera tillvägagångssättet, eleverna fick sedan arbeta självständigt. Eleverna fick sedan hjälpa till att redogöra för vilka bråktal som tillhörde de olika påståendena. Under lektionstillfället arbetade vi aktivt med att betona följande strategier under samtliga passande moment, en hel alltid representeras av lika stora täljare och nämnare, En halv representeras av att täljaren är hälften av nämnaren, Om täljaren är mindre än hälften av nämnaren så är bråket mindre än en halv, om täljaren är mer än hälften av nämnaren så är bråket större än en halv, om täljaren är större än nämnaren är bråket större än 1. Syftet med aktiviteten var att skapa fusion av de kritiska aspekterna täljaren och nämnarens betydelse samt relationen mellan täljaren och nämnaren.

Slutligen fick eleverna placera ut tre olika bråktal på en tallinje, tallinjen var uppdelad i fjärdedelar och de tal som skulle placeras ut var $2/8$, $3/4$ och $9/8$. Även denna aktivitet syftade till att skapa fusion av de tre ovannämnda kritiska aspekterna. De flesta elever klarade av att placera ut $3/4$ men kunde endast uppskatta vart de andra bråktalen kunde placeras utefter de referenspunkter vi har tryckt på under undervisningen. Läraren gjorde en kort genomgång där ytterligare sträck mellan fjärdedelarna gjordes för att skapa 8 delar på tallinjen. Därefter fick eleverna placera ut bråktalen på tallinjen genom att räkna delarna (täljaren).

Kritiska aspekter	Varierar	Konstant	Hur (separation)
Täljaren och nämnarens betydelse	Täljaren	Nämnaren (+ allt annat	Pizzamodellen, Tallinje
bråktal större än 1	Täljaren	nämnaren	Tallinje
Täljaren och nämnarens betydelse	Nämnaren	Täljaren (+ allt annat	kvadratmodellen
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (likvärdiga bråk)	Täljaren och nämnaren	Storleken är konstant	Kvadratmodellen
Bråk som del av olika helheter (olika representationsmedel)	Helhetens storlek och form	Bråkdelen	Godis, tallinje och pizza

Variationsmönster som ligger till grund för planering inför lektionstillfälle 1.

5.2.1 Analys av lektion 1

Vid analysen av eftertestet kunde vi se en relativt tydlig förbättring. Eleverna presterade i genomsnitt 12% bättre när vi sammanställde samtliga uppgifter (se bilaga 1). Störst förbättring visade eleverna på uppgiften som behandlade storleksordning av bråktal utefter referenspunkter, se tabell 2. Vilket synliggör att eleverna har börjat utveckla en viss förståelse för relationen mellan täljaren och nämnaren samt betydelsen av täljaren och nämnaren. Dock presterade eleverna endast marginellt bättre på storlekjämförelseuppgiften, se tabell 1. Slutsatsen som drogs var då att vi behövde presentera de kritiska aspekterna kring nämnarens betydelse samt relationen mellan täljaren och nämnaren genom en tydligare metod för att skapa bättre förutsättningar för att eleverna ska kunna identifiera de kritiska aspekterna. Samt där övergången från representationsformen till tallinjen blir mer konkret och direkt överföringsbar.

Resultatet visade även att en markant förbättring kopplat till uppgifterna som belyste bråk som del av ett antal samt likvärdiga bråk, där eleverna presterade 19% bättre jämfört med förtestet, se tabell 3 och 4. Del av antal uppgiften använde de sig av grupperingsstrategier på ett tydligare sätt utifrån momentet där vi delade upp godisar. Elevernas svar indikerade dock bristfällig förståelse för likvärdiga bråk när de inte presenterades i form av talraden. När eleverna skulle avgöra vilka bråk som var lika stora presterade de i stället 7% sämre vid eftertestet. Elevernas förbättring av förståelsen för likvärdiga bråk på talraden måste därav sättas i relation till denna försämring, då båda uppgifterna hade för avsikt att testa eleverna inom samma kritiska aspekt.

Vid analys av observationer och videoinspelning uppkom flera intressanta aspekter som vi inte uppmärksammade under lektionens gång. Dels förklarade en elev att han använde sig av division som strategi för att storleksordna tal efter referenspunkter, något som vi missade att uppmärksamma trots att eleven uttryckte följande, "13/12 är större än 1, då är täljaren större än nämnaren och om jag delar 13 med 12 då får jag mer än 1". Division är ytterligare ett sätt att behandla bråktal, dock inget som vi valde att använda som fokus för våra lektioner då vi konstaterade att det förmodligen blir för abstrakt för våra elevgrupper utifrån den nivå de i nuläget befinner sig. Vi såg även att innehållet som behandlade den kritiska aspekten kring nämnarens betydelse och täljaren och nämnarens relation inte praktiskt involverade eleverna tillräckligt mycket.

5.2.2 Planering inför lektion 2

Inför lektionscykel två reviderades endast små delar av lektionsplaneringen. Momenten med kvadratmodellen som användes under första lektionstillfället togs bort med anledning till att vi utifrån observationer, analys och resultat av eftertest ansåg att övergången mellan kvadratmodellen och tallinjen inte blev tillräckligt konkret för eleverna. Istället användes bråkplank hel till tiondelar, som ett försök att tydligare konkretisera momentet och skapa möjlighet för eleverna att urskilja kritiska aspekter.

Kritiska aspekter	Varierar	Konstant	Hur (separation)
Täljaren och nämnarens betydelse	Täljaren	Nämnamnaren (+ allt annat)	Pizzamodellen, Tallinje
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (bråktal större än 1)	Täljaren	Nämnamnaren	Tallinje
Täljaren och nämnarens betydelse	Nämnamnaren	Täljaren (+ allt annat)	Tallinje, Bråkplank
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (likvärdiga bråk)	Täljaren och nämnaren	Storleken är konstant	Bråkplank
Bråk som del av olika helheter (olika representationsmedel)	Helhetens storlek och form	Bråkdelen	Godis, tallinje och pizza

Variationsmönster som ligger till grund för planering inför lektionstillfälle 2.

5.3 Lektion 2

Som nämnt ovan var upplägget inför lektion två var i stort sett likadan som tidigare utförd lektionscykel fast med viss förändring. Introduceringen av lektion med att skapa variationsmönster kopplat till täljarens betydelse behölls separation, kontrast och generalisering. Likt tidigare lektion behandlades täljarens betydelse genom att bakgrunden varierar och täljarens värde var invariant. Dock med en viss skillnad i förklaringar och modellering av $1/4$ med pizzamodellen men den kritiska aspekten som var tänkt att behandla kvarstod. För att skapa kontrast mot vad en fjärdedel är och vad det inte är, ritade vi delningen av pizzan med olika stora delar, som vi tog avstamp i. Läraren övergick till att i detta moment även belysa större än en hel, vilket gjorde att två kritiska aspekter blandades och inte behandlades separat. Detta föranledde till att bråktal större än en hel inte varierades utan endast belystes och arbetades kring i ett litet moment.

Utdrag av lektion 2

Läraren: Om nu Johan kommer med en pizzabita och den med är $1/4$, hur många fjärdedelar har vi då?

Elev: Då blir det fem femtedelar.

[Läraren använder två pizzor som är uppdelade i fjärdedelar och plockar ut en fjärdedel av ena pizzan.]

Läraren: Om vi har två pizzor som båda är delade i 4 delar, behåller vi samma nämnare, alltså fjärdedelar, om vi har fyra fjärdedelar och sedan tillkommer en till fjärdedel *[Läraren skriver ut $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ på tavlan under pizzabitarna]* hur många fjärdedelar har vi då?

Eleven: fem fjärdedelar.

Läraren: Ja det stämmer, eftersom delarna, som vi avläser med nämnaren [*läraren visar med handen vart nämnaren är på samtliga fjärdedelar*] fortfarande är fjärdedelar så ändras endast täljaren, alltså hur många vi har.

Variation bidrar med att urskilja kritiska aspekter av ett lärandeobjekt. I utdraget ovan missar läraren att variera bråktalet $5/4$, som är större än en hel, därav fick eleverna inte möjligheten att kunna uppmärksamma likheter och skillnader i angivna momentet. För att stödja elevernas förståelse av ett bråktal större än ett, och därmed nå den kritiska aspekten betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (bråktal större än 1) krävs det att flera olika mönster och representationer av bråktal ingår i undervisningsmomentet.

Undervisningen fortsatte med att elevgruppen fick laborera med konkreta material till uppgiften att dela upp 8 godisar i $3/4$ tillsammans med sin bänkkompis. I momentet är täljaren och nämnaren är konstanta, $3/4$, men där separation skapas då bråkdelen varierar. Efter detta moment visade läraren ett bråkplank för hel till tiondelar på tv-skärmen. Tillsammans i helklass pratade vi om hur bråktalen förhåller sig till varandra. Läraren förklarar att bråkplanket visar bråktal som hela bråktal men därtill även visar bråktal som är mindre än en hel. Eleverna fick i uppgift att tillsammans i par, skriva ut samtliga bråktal på bråkplanket.

Utdrag av lektion 2

Läraren: [*Målar i $1/2$ i bråkplanket och skriver ut bråktalet på tavlan $1/2$*] Nu har jag fyllt i en halv... nu skulle jag vilja att ni hittar andra bråktal som är lika stor som en halv. Vilka bråktal är lika stora som en halv?

Elev 1: två fjärdedelar

Läraren: [*Målar i $2/4$ i bråkplanket och skriver ut bråktalet $2/4$ på tavlan*] två fjärdedelar, ja det är lika stor som en halv.

Elev 2: tre sjättedelar

Läraren: [*Målar i $3/6$ i bråkplanket och skriver ut bråktalet $3/6$ på tavlan*] tre sjättedelar är lika stor som en halv, och två fjärdedelar.

Elev 3: fyra åttondelar.

Lärare [*Målar i $4/8$ i bråkplanket och skriver ut bråktalet $4/8$ på tavlan*] fyra åttondelar är en halv

Elev 4: fem tiondelar.

Lärare: [*Målar i $5/10$ i bråkplanket och skriver ut bråktalet på tavlan*] fem tiondelar är också lika stora som en halv. Vi kan alltså skriva en halv på många olika sätt.

I utdraget framgår det att läraren uppmanar elever att hitta och benämna bråktal som har likvärdig betydelse av en halv. Eleverna uppmärksammas mot att en halv kan företrädas på olika sätt och kan skrivas med olika bråktal. Här skapas en variation gentemot sättet att skriva en halv, där betydelsen av värdet av en halv är invariant. Fortsatt fick de arbeta med att färglägga olika bråktal med samma värde på liknande sätt. Efter att eleverna fått fundera och försöka

enskilt och tillsammans med bänkkamrat, lyfte vi momentet i helklass. Avsikten med aktiviteten var att behandla kritiska aspekten att skapa förståelse kring betydelse av relationen mellan täljaren och nämnaren med likvärdigt bråk. I detta delmoment varierar vi både täljare och nämnare. Vidare kunde vi komma fram till att ju större nämnare är i bråket desto mindre blir bråket.

5.3.1 Analys av lektion 2

Sammanställningen av elevgruppens resultat av eftertestet visade endast på en liten förbättring. Övergripande presterade eleverna i genomsnitt 11,49 % bättre på eftertestet än förtestet (se bilaga 1). Störst ökning visade sig i uppgiften som behandlade storleksordning av bråk utefter referenspunkter med 37,72% (se tabell 2). Eleverna är på god väg att skapa förståelse mot att kunna urskilja kritiska aspekterna täljare och nämnarens betydelse samt relationen mellan täljaren och nämnaren, men dock inte fullt lyckats befästa kunskapen. En ytterligare förbättring som framkom i resultatet var att placera ut bråk på tallinje med olika täljare och nämnare. Elevernas genomsnittliga resultat ökade med 21,05% respektive 31,58 % på en av uppgifterna (se bilaga 1). Dock kan vi se att i en annan uppgift som behandlar bråk på tallinje med olika täljare och nämnare resulterade i en oförändrad och endast liten förändring (se bilaga 1). Detta måste vi givetvis ställa i relation till det förbättrade resultatet.

Vid analysen av resultatet kunde vi se en viss försämring i elevernas prestation gällande bråkets form och att skriva ut antalet skuggade delar till bråkform (se tabell 5). Utefter observationer, lektionsanalys efter första lektionscykel och analys av förtest för denna elevgrupp tog vi bråkets form för givet och valde att inte behandla det närmare, vilket kan ha haft en påverkan på elevernas resultat. I eftertestet visade det sig att elevernas prestation hade försämrats i uppgiften kopplat till bråkets form med -5,26 %. Under analysen av resultatet gällande likvärdigbråk kunde vi se en liten ökning i resultatet, vilket indikerar på att vi inte har varierat kritiska egenskapen i tillräcklig utsträckning för att ge eleverna möjlighet att skapa sig en djupare förståelse. Dock finner vi att vi lyckats med att variera bråket $\frac{1}{2}$ betydligt bättre för elevgruppen då resultatet pekar på en starkare förståelse.

Lektionen ämnad för denna elevgrupp tog längre tid än vad som var planerat, av den anledningen kunde inte hela lektionsinnehållet behandlas inom den avsatta tidsramen. Elevgruppen fick under denna lektionscykel således inte till sig hela planerade innehållet likt den tidigare elevgruppen fick. Det praktiska momentet med tänkta kritiska aspekten, betydelse av relationen mellan täljare och nämnaren fick eleverna inte i lika stor utsträckning praktiskt arbeta med att storleksordna bråk utefter referenspunkter. Uppgiften kopplat till denna kritiska aspekt gjordes enskilt och kort som sedan lyftes i helklass. Orsak till att tiden drog iväg och delar av lektionsinnehållet uteblev berodde dels på att eleverna fyllde själva i hela bråkplanket, dels att diskussioner drog iväg. Dock visar resultatet en ökning med 37,72% jämfört med förtestet.

5.3.2 Planering inför lektion 3

Likt ovan nämnda lektionsplanering reviderades endast några få saker inför lektionscykel tre. Det som reviderades var vissa delar i undervisningsmetoden, men även kritiska aspekter och variationsmönster. Genom observatörens anteckningar samt videoupptagningen, bedömde vi att momentet där eleverna fyllde i egna bråkplank tog för lång tid. Detta påverkade innehållet

som skulle hinnas med samt gav inget tillskott till lärandet utefter elevernas resultat på eftertestet, därav fick eleverna två redan ifyllda bråkplank från en hel till tio $1/10$.

För att begränsa innehållet ytterligare togs även momentet som behandlade del av antal med hjälp av godisar bort. Dels såg vi ingen förbättring på eftertestet, dels möjliggjorde det minskade innehållet ett fördjupat fokus av både tallinjen och bråkplanket. För att belysa den kritiska aspekten om bråkdelen som del av olika helheter lades ytterligare en familjepizza till vid sidan om pizzamodellen för att variera att bråkets storlek utgår från bråkdelen.

Kritiska aspekter	Varierar	Konstant	Hur (separation)
Täljaren och nämnarens betydelse	Täljaren	Nämnaren (+ allt annat)	Pizzamodellen, Tallinje
bråktal större än 1	Täljaren	nämnaren	Tallinje,
Täljaren och nämnarens betydelse	Nämnaren	Täljaren (+ allt annat)	Tallinje, bråkplank
Betydelsen av relationen mellan täljare och nämnare (likvärdiga bråk)	Täljaren och nämnaren	Storleken är konstant	Bråkplank
Bråk som del av olika helheter (olika representationsmedel)	Helhetens storlek och form	Bråkdelen	Tallinje och pizza

Variationsmönster som ligger till grund för planering inför lektionstillfälle 3.

5.4 Lektion 3

Uppstarten av lektionen inleds på liknade sätt som tidigare lektioner där bråkets form diskuterades och pizzamodellen föranledde tallinjen med fokus på täljarens betydelse. Skillnaden var att innehållet nu var begränsat och att läraren kunde lägga mer tid klassrumsdialoger. Den extra tiden gav även utrymme för att på ett tydligare sätt presentera innehållet på tavlan. Pizzamodellen gjordes denna gång både utefter en riktigt pizza på en skärm samt en fiktiv pizza på tavlan, delarna $1/4$ placerades i varje del i pizzen och mer plats skapades på tavlan för att beskriva addition och subtraktion av varje del när en pizza bit blivit uppäten. En familjepizza lades sedan till och delades upp på samma sätt som tidigare. Frågan ställdes sedan om vilken del som var störst, $1/4$ av den vanliga pizzen eller $1/4$ av familjepizzen.

Vid övergång till tallinjen gjordes en tydlig förändring. Tallinjen som exemplifierade övergången från pizzen var denna gång utan markeringar för fjärdedelar. Detta gjorde nu i stället tillsammans med eleverna så eleverna fick träna på att dela tallinjen i lika delar utefter nämnarens värde. Därefter fortskred lektionen som tidigare.

Delmomentet kring bråkplanket innehöll två större förändringar. Introduktionen startade utefter samma frågeställningar om mönster som tidigare men då bråkplanket redan var ifyllt lades betydligt mer tid till klassrumsdiskussioner och att praktiskt fylla i olika bråktal för att konkretisera samt skapa kontrast. Frågan om vilken del på bråkplanket som var störst kan följas i dialogen nedan.

Utdrag från klassrumsdialog lektion 3:

Elev: $1/10$ är störst

Läraren: Okej, ni tänkte då att den delen, alltså en tiondel [*Pekar på 1/10 på bråkplanket på skärmen*], är den största delen?

Elev: Ja

Läraren: Okej, varför tycker ni att den är störst?

Elev: För att 10 är större än 1.

Läraren: Ja det stämmer, tänker vi på talen som vanliga heltal så är ju 10 större än 1. Men siffrorna som står i ett bråktal fungerar ju inte alltid på samma sätt som vanliga heltal. Vi provar att färglägga en hel på bråkplanket och 1/10 på bråkplanket så kanske vi kan se vilken som är störst.

Läraren skapar då kontrast genom att skriva upp talen 10 och 1 på tavlan för att jämföra vilken som var störst. Därefter övergår läraren till bråkplanket och färglägger 1, eller en hel, och 1/10. Sedan skriver han upp talet 1 och 1/10 på tavlan under heltalen som tidigare skrev upp.

Läraren: Vilken del tycker du är störst nu?

Elev: Ettan är större

Läraren fortsätter då att förklara nämnaren och täljarens roll. Att nämnaren endast beskriver hur många delar något är delat i och täljaren säger hur många delar vi har. Klassrumsdiskussionen fortsätter med de kvarvarande frågorna och nu blev det väldigt tydligt vilken del som var den minsta då läraren exemplifierade utefter det första felaktiga svaret. Vid frågan om vilket mönster eleverna kunde se framkom den viktiga aspekten att för varje gång vi delar något, alltså ju högre värdet är på nämnaren, desto mindre blev delarna. Eleverna lyfte att nämnaren ökade för varje steg, och då poängterade läraren vad som då händer med delarna och ställde frågan till klassen. På grund av att täljaren var konstant och nämnaren varierades kunde eleverna i dialogen urskilja den kritiska aspekten kring nämnarens betydelse.

Eleverna fyllde därefter i samtliga tal som var en halv samt de tal som var lika stora som 1/3 på två olika bråkplank. Sedan placeras talen ut på en tallinje där steget mellan noll och en hel var lika stor som bråkplanket samt låg strax över i linje för att göra en tydlig övergång från bråkplank till tallinje. Eleverna fick dela upp tallinjen med hjälp av markeringar på liknande sätt som delarna är uppdelade på ett bråkplank. Läraren gjorde en talrad mellan varje moment på tavlan, exempelvis $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ där stor vikt lades vid betoningar kring nämnaren och täljarens relation och begreppen halv och hel. Generalisering skapades även genom att visualisera bråktalen en halv i form av en areamodell av en cirkel. Läraren skrev sedan upp ett antal olika bråktal på tavlan och uppgiften var att eleverna skulle med hjälp av bråkplanket och tallinjen avgöra vilket tal som var störst. Vid de första två talen varierades endast nämnaren, täljaren förblev konstant. Vid de sista talen varierades både täljaren och nämnaren i syfte att skapa fusion av den kritiska aspekten täljaren och nämnarens betydelse samt relationen sinsemellan. Talen som användes var 2/5 och 3/4 och dialogen följer nedan.

Utdrag från klassrumsdialog lektion 3:

Elev: Får jag gissa?

Läraren: Absolut

Elev: Två femtedelar är störst

Läraren: Okej, vi testar och ser om vi kan ta hjälp av bråkplanket för att jämföra talen. [Läraren fyller i $2/5$ och $3/4$ genom att räkna täljaren genom uppräknings och färglägger varje tal i två olika färger]

Läraren: Om vi tittar på talen nu då, vilket tal är störst?

Elev: Tre fjärdedelar

Läraren: Exakt, bra! Och om vi tittar på talen så kan vi ju se att $3/4$ är ju nästan en hel, bara $1/4$ till så har vi en hel. Medan $2/5$ inte ens är en halv, den är ju lite mindre än en halv om vi tittar på bråkplanket. [Läraren fortsätter utlägg och betonar återigen relationen mellan nämnare och täljare samt begreppen hel och halv]

Arbetet fortskred på liknande sätt vid nästa moment där bråktal placerades utefter referenspunkter, enda skillnaden var att talen som eleverna placerade var mindre till antal samt att bråktalens värde låg närmare referenspunkterna. Även det avslutande momentet med att placera ut bråktal på tallinjen var identisk, skillnaden var att tydligare fokus lades på att dela upp tallinjen i lika stora delar som nämnaren samt att använda sig av uppräknings av täljaren vid placering på tallinjen.

5.4.1 Slutgiltig analys och analys av eftertest

Resultatet på eftertestet för lektion tre visade störst procentuell förbättring vid både det totala resultatet samt vid analys av individuella uppgifter kopplade till kritiska aspekter. Den totala förbättringen var 14,58% jämfört med förtestet. Vid lektion ett ökade resultaten sammantaget med 12,46% och 11,49% vid lektion två. Störst förbättring visades på den uppgiften som behandlade storleksjämförelse, det var även den uppgiften som jämfört med tidigare lektioner ökade mest (se tabell 1).

Uppgift storleksjämföra bråktal				
	Förtest	Eftertest	Max poäng	Ökning %
Lektion 1	27	33	63	9,52%
Lektion 2	25	33	57	14,04%
Lektion 3	24	50	60	43,33%

Tabell: 1

En markant ökning konstaterades även vid uppgiften där eleverna storleksordnade bråktal utefter referenspunkter. Det var även en av de uppgifter som i stora drag behölls konstant genom samtliga lektionsdesigner, antalet bråktal reducerades samt valet av talen utgick från principen att talen skulle ligga nära referenspunkten på tallinjen. Vid analys såg vi en tydlig ökning för

samtliga lektionstillfällena med endast en viss försämring jämfört med de andra lektionerna vid lektion två (se tabell 2).

Storleksordna bråktal efter referenspunkter				
	Förtest	Eftertest	Max poäng	Ökning %
Lektion 1	13	66	126	42,06%
Lektion 2	30	73	114	37,72%
Lektion 3	29	76	120	39,17%

Tabell: 2

Vid analysen av de uppgifter som berörde likvärdiga bråktal, en central del av den kritiska aspekten om relationen mellan täljaren och nämnaren, såg vi varierat resultat (se tabell 3). Likvärdiga bråk i form av talrader ökade relativt tydligt med genomsnittligen närmare 15%, dock såg vi ingen förbättring vid jämförelse av likvärdiga bråktal då resultatet blev oförändrat. Skillnad gick även att urskilja lektionerna då ökningen blev något lägre vid lektion två.

Likvärdiga bråktal (talrad)				
	Förtest	Eftertest	Max poäng	Ökning %
Lektion 1	16	28	63	19,05%
Lektion 2	30	38	57	14,04%
Lektion 3	21	32	60	18,33%

Tabell: 3

Den kritiska aspekten som behandlade bråk som del av olika helheter var en av de aspekter som vi valde att begränsa utefter studiens gång. Trots detta så lyckades eleverna bäst vid lektionstillfälle tre där två lektionsmoment kring del av antal reducerats bort (se tabell 4). I stället beskrev vi bråkdelen genom att skapa ett variationsmönster kring en vanlig pizza och familjepizza, där täljaren och nämnaren var konstant, men bråkdelen varierade. Vilket visar på resultatet vara minst lika effektivt som att gruppera. Dock såg vi att lektion ett, som innehöll båda variationsmönstren kring den kritiska aspekten, var den lektionen där eleverna visade mest utpräglade kunskaper om aspekten.

Bråk som del av antal (Skugga)				
	Förtest	Eftertest	Max poäng	Ökning %
Lektion 1	9	17	42	19,05%
Lektion 2	16	19	38	7,89%
Lektion 3	10	21	40	27,50%

Tabell: 4

Vi konstaterade även att vid vissa uppgifter blev resultaten lägre än vid förtestet. Det var främst de uppgifter som utefter analys av förtest, observationer och videoinspelning bedömdes som icke kritiska och som därav togs för givet. Det tydligaste exemplet var bråktalets form och att kunna skriva om ifyllda objekt till bråktal. Inför lektion två togs variationsmönstret bort som skapade kontrast kring bråkdelen. Resultatet visar en försämring (se tabell 5). Där misstag utgjordes av att eleverna endast skrev täljaren eller att de räknade täljaren och nämnaren var för

sig, att de då inte inkluderade täljaren som en del av den totala bråkdelen (nämnaren). Exempelvis skrev eleverna $\frac{2}{6}$ i stället för det korrekta svaret $\frac{2}{8}$.

Skriva om antal skuggade till bråkform				
	Förtest	Eftertest	Max poäng	Ökning %
Lektion 1	43	51	63	12,70%
Lektion 2	43	40	57	-5,26%
Lektion 3	41	49	60	13,33%

Tabell: 5

Vid sammanlagt fem uppgifter behandlades tallinjen där olika bråktal skulle placeras ut. Det övergripande resultatet visade en marginell förbättring men vid djupare analys kunde vi se att vissa bråktal utgjorde större svårigheter för eleverna. Bråktal där tallinjen var uppdelad i lika många delar som nämnaren var betydligt lättare och eleverna visade en tydlig förbättring jämfört med förtestet. De bråktal som visade sig vara svårast var de tal som nämnaren skiljde sig från de uppdelade delarna, där visade eleverna ingen förbättring. När vi specifikt analyserade testen för eleverna i lektion tre såg vi att de applicerade strategier för att dela lika delar men placerade då bråktalet ett steg fel. Vilket visar på felaktiga metodiska misstag kopplat till tallinjen och att eleverna ändå uppskattade storleken på bråktalet rätt. Dock gav vi inte rätt för dessa elevsvar. Vi såg även vid observationer att vissa elever började räkna vid nollan på tallinje snarare än att starta uppräknings vid det första talet (täljaren).

5.4 Sammanfattning av resultat

Resultatet av learning studien åskådliggör att elevers lärande inom matematikområdet bråk har främjats genom variationsteorin som pedagogiskt analysverktyg. Syftet med studien är att undersöka hur matematikundervisningen bör utformas för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna. Genom att undersöka och identifiera kritiska aspekter för den aktuella elevgrupp inom matematikområdet bråk har pedagogiska åtgärder vidtagits med syfte att främja kunskapsutveckling av lärandeobjektet. Centralt i utformningen av matematikundervisningen inom bråk är de kritiska aspekterna, vilket spelar en avgörande roll för att förstå hur undervisningsinnehållet bör behandlas för de aktuella elevgrupperna i årskurs 4. Inga nya kritiska aspekter identifierades under processen, utan samtliga tre lektioner utgick utifrån de tidigare hypotetiska aspekterna.

I revideringen gällande innehållet av undervisningen användes variation i syfte om att rikta fokus mot de kritiska aspekterna för att skapa förståelse för lärandeobjektet. De variationsmönster som användes i undervisningen var separation i form av kontrastering, generalisering och fusion som gav möjlighet att i större utsträckning kunna urskilja de kritiska aspekterna och således främja lärandet.

Resultatet visar en generell förbättring av elevernas förmåga att förstå och arbeta med att storleksordna bråktal och jämföra bråk efter genomförande tre lektionscykler, där variationsteorin fungerade som ramverk för att planera undervisningen. Utfallet från eftertestet visar på en positiv utveckling framför allt i de uppgifter som behandlade storleksordna bråktal och jämföra bråktal. Sista lektionen noterades störst procentuell ökning, i såväl det totala resultatet som i uppgifterna kopplat till kritiska aspekterna.

I första lektionen cykeln behandlades samtliga kritiska aspekter i undervisningsmomentet och variationsmönster i form av kontrastering och generalisering. Ett försök att skapa fusion gjordes i slutet av lektionen genom att sammanfoga samtliga kritiska aspekter. I den andra lärande cykeln gjordes en begränsning utifrån våra sammanställda kritiska aspekter och fokus riktades i stället på variationsmönster för att skapa djupare förståelse gällande lärandeobjektet inom lektionstillfället. Vidare visar resultatet för denna elevgrupp att eleverna inte i lika stor utsträckning lyckades att urskilja samtliga kritiska aspekterna som var ämnade för undervisningstillfället. Därtill visar utfallet vikten av variation i undervisningen för att lyfta fram egenskaperna av lärandeobjektet som verkar för att eleverna ska lyckas utveckla och fördjupa sina kunskaper. Utfallet indikerar att när pedagogen inte använder variation i undervisningsmomentet får eleverna inte möjlighet att urskilja kritiska egenskaper, vilket kan försvåra inläringen. Lärandeobjektet framhävs inte lika tydligt och eleverna får inte samma möjlighet att stärka sitt lärande. Likt den första lektions cykel behandlades samtliga kritiska aspekter inom den tredje cykeln. Dock med ännu tydligare fokus på variatonsmönster gällande kontrast, generalisering och slutligen fusion för att underlätta för eleverna att urskilja avgörande egenskaper inom lärandeobjektet. Vidare visar utfallet att praktiska inslags i undervisningen stärker elevers lärande att urskilja kritiska aspekter. Ändringarna framhävde störst kunskapsutveckling hos eleverna med klarast progression jämfört med tidigare lektionscykler. Elevernas lärande visar en påtaglig ökning i kunskapsutvecklingen från första lektionstillfället till det tredje.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att tillämpningen av learning study inom matematikämnet bråk, gav eleverna möjlighet att stärka lärandet. Elevernas lärande stärks genom medveten användning av variation i undervisningen för att belysa och urskilja centrala kritiska aspekter av lärandet. Variationsmönster i matematikundervisningen som behandlar storleksordning och jämförelse av bråktal bistår såldes med olika perspektiv på lärandeobjektet som främjar och ökar elevers kunskap. Resultatet visar att när elever får möjligheten att urskilja kritiska aspekter och där innehållet bygger på variationsmönster, främjas kunskapsutveckling.

6. DISKUSSION

I studien undersöktes vilka kritiska aspekter som elever behöver identifiera för att tillgodose kunskap om att storleksordna och jämföra bråktal, hur undervisningen bör utformas för att eleverna ska kunna identifiera de kritiska aspekterna samt vilket lärande som har skett utefter det definierade lärandeobjektet om att storleksordna och jämföra bråktal.

Analyser av för- och eftertest resulterade i framtagande av totalt sex kritiska aspekter kopplat till lärandeobjektet. Genom att separera varje kritisk aspekt med hjälp av både *kontrast* och *generalisering* kunde vi utefter resultatet övergripande konstatera att eleverna tillgodosett sig förmågor som ökade deras förståelse om lärandeobjektet. Det var endast vid ett tillfälle, där en kritisk aspekt (bråktalets form) togs för givet, som vi såg en viss försämring under lektionstillfälle två. Den tydligaste förbättringen såg vi på lektionstillfälle tre där också de representationsformer som valts både begränsades samt bearbetades utefter analys och diskussion. Studien visar i linje med tidigare forskning (Rojo, King, Gersib et al. 2023, Lortie-

Forgues, Tian & Siegler 2015, Rinne, Ye & Jordan 2017) att undervisningsstrategier med hjälp av tallinjen i kan användas för att stödja elevers lärande och hjälpa eleverna att identifiera kritiska aspekter. Resultatet visar att användandet av variationsteorin som ramverk applicering av undervisningsstrategier, där variation riktas mot kritiska aspekter av lärandeobjektet, kan förbättra elevers förståelse inom matematikområdet bråk. I denna studie har variationsteorin haft en avgörande roll för att identifiera de aspekter som varit kritiska för eleverna kopplat till lärandeobjektet. Bergqvist & Echevarría (2011) konstaterar att variationsteorin bidrar till att lärare kan förstå möjliga samband mellan undervisningen och elevernas lärande. Vidare poängterar författarna att de variationsteoretiska principerna underlättar för lärare att identifiera vad eleverna behöver lära sig och hur undervisningen kan utformas för att möjliggöra lärande. Vilket även har observerats i den aktuella studien. Ling (2014) beskriver hur variationsteorin fungerar som en vägledning i lektionsdesign genom att peka på de nödvändiga förutsättningarna för lärande samt hjälper till att göra undervisningsstrategier mer effektiva. För att skapa dessa förutsättningar gavs eleverna möjlighet att lära genom olika variationsmönster av de kritiska aspekterna av lärandeobjektet. Resultaten visar att när eleverna exponerades för variationsmönster av de kritiska aspekterna, skedde en progression i deras lärande. Resultaten visar även en progression i hur undervisningen bör struktureras med hjälp av den cykliska processen i en learning study. Samtidigt förbättrades även studenternas och lärarnas förmåga att identifiera de kritiska aspekterna hos lärandeobjektet. Detta beskriver Thorsten (2017) som en effekt av tillämpningen av learning study, där lärarna förändrar sitt tillvägagångssätt och arbetar mer specifikt och innehållsinriktat, vilket är avgörande för elevernas möjlighet att tillägna sig ny kunskap.

En stor del av den ämnesdidaktiska forskningen som föranledde studien undersöker vilka strategier som är effektiva för att utveckla förståelse inom bråk. Genom att förena tidigare forskning om elevers tillämpning av felaktiga och lyckosamma strategier (se Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Lortie-Forgues, Tian och Siegler, 2015) med variationsteorin underlättades möjligheten att skapa kontrastering vilket är centralt för att separera de kritiska dragen så de blir identifierbara för eleverna (Ling 2014). Vidare konstaterar Holmqvist (2006) att lärarnas ämneskunskaper och erfarenheter bidrar till att ta fram effektiva variationsmönster. Då de medverkande lärarna saknar längre erfarenhet har ämnesteoretisk forskning samt ämnesdidaktisk litteratur legat till grund för vilka variationsmönster som valdes samt vilka strategier som bör belysa de kritiska aspekterna. Van de Walle, Karp & Bay-Williams (2020) lyfter exempelvis uppräknig som en effektiv metod vid introduktion av bråktal vilket användes genomgående för att addera täljaren. Förankringen mellan variationsteorin och undervisningsstrategier utgör därav en viktig aspekt för lärare där fokus riktas mot variation kring lärandeobjektet och som vid reflektion kan skapa förståelse till varför elever inte tar till sig matematikundervisningen (Runesson 2005). En tydlig framgångsfaktor för lektionsdesignen var även att begränsa innehållet och låta de centrala kritiska aspekterna vara den röda tråden i undervisningen. Det skapade fler möjligheter till ytterligare variationsmönster samt att återgå till redan identifierat innehåll för att skapa fusion mellan de kritiska aspekterna.

En begränsning för studien var att inte genomföra intervjuer med eleverna med utifrån frågeställningar som riktar fokus på elevers lärande. Anledningarna till valet av att huvudsakligen bygga resultatet på för- och eftertest var dels tidsaspekten, dels att den relativt stora elevgruppen (n=60) skulle ge tillräcklig tydlighet av elevernas lärande. Bergqvist & Echevarría (2011) konstaterar att resultatet på testerna ska visa om eleverna lyckats identifiera de kritiska aspekterna, och att det sällan innebär elevsvar som är 100% rätt. Om testresultatet

visar upp mot 80% rätt brukar oftast studien ses som lyckad och frågeställningar kring hur undervisningen bör utformas kan med tillräcklig tydlighet bekräftas. På eftertestet lyckades 83,33% av eleverna att storleksordna bråktalen vilket vi konstaterade var tillräckligt för att dra slutsatsen att eleverna har lyckats identifiera de kritiska aspekterna kopplade till att storleksordna bråktal. Dock lyckades vi inte komma upp i lika höga procentsatser vid uppgifter som behandlade likvärdiga bråk och att placera bråktal på tallinjen. Den procentuella ökningen jämfört med förtestet var dock markant vilket visar på att majoriteten av eleverna lyckades att identifiera de kritiska aspekterna som vår studie lyft fram som avgörande för att kunna storleksordna och jämföra bråktal.

6.1 Metoddiskussion

Med en variationsteoretisk ansats genomfördes en learning study för att belysa elevers lärande genom att identifiera kritiska aspekter som verkar för att utveckla elevers förståelse inom matematikområdet bråk. Syftet med studien var att undersöka hur matematikundervisningen bör utformas för att eleverna skall få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Utifrån dessa frågeställningar undersöks sedan elevernas lärande samt utveckling inom matematikområdet. I studien har vi konsekvent utgått från vårt syfte och frågeställningar samt systematiskt redogjort för studiens metod, analys och resultat.

Som nämnt tidigare i studien är detta vår första gång som vi arbetar med learning study, med det sagt kan olika val säkerligen ha gjort annorlunda. I vår analys har vi strävat efter att följa etiska riktlinjer för att säkerställa att vi har behandlat empirisk material på ett rättvist och ansvarsfullt sätt. För att stärka studiens trovärdighet och starkare belysa resultaten har vi valt att behålla citat i originalform, använt utdrag ur sin ursprungliga form därtill visat figurer, tabeller och statistik. Detta bidrar till ökad transparens genom att vi tydligt och öppet redovisar materialet, vilket minskar möjlighet till feltolkningar, förvränga information samt att bibehålla och bevara tillförlitligheten i studien.

I analysprocessen har vi använt variationsteorins begrepp för att skapa en tydlig struktur för tolkningen av vårt empiriska material. Denna teoretiska förankring har hjälpt oss att tydligt identifiera och analysera centrala aspekter av lärandeobjektet, vilket ökar trovärdigheten i våra resultat. Genom att arbeta utifrån ett teoretiskt ramverk har vi också strävat efter transparens i analysen och minskat risken för att egna uppfattningar påverkar våra slutsatser, vilket gör tolkningen mer objektiv och tillförlitlig.

Vid analysen av den insamlade empirin var vi alltid två som granska och analysera förtesten, lektionerna och eftertesten. Detta arbetssätt gjorde så att vi kunde göra en noggrann dubbelkontroll av datan, vilket minskade risken för subjektiva tolkningar och därtill ökar tillförlitligheten i resultaten.

Videodokumentationens bidragande i studien utgör möjligheten att vid flera tillfällen titta igenom inspelningen på nytt och skapa nya perspektiv på lektionsinnehållet och att minska påverkan av våra egna subjektiva uppfattningar och tidigare erfarenheter. Inledningsvis fastnade vi mestadels för vårt eget agerande vid tavlan. Genom att titta på inspelningarna flertalet gånger kunde vi precisera analysen mot att främst undersöka lärarens roll i att tydliggöra innehållet och de kritiska aspekterna av lärandeobjektet. Processen bidrog till att skapa en mer objektiv analys, där vi kunde säkerställa att fokus låg på de kritiska delarna av undervisningen snarare än på detaljer som låg utanför studiens syfte.

Vanligtvis utförs learning studies av verksamma lärare med hjälp av en handledare, då vi ännu inte är legitimerade lärare fick vi stöd av två lärare vid genomförande av lektioner, observationer och diskussioner inför analys för att inte påverka studiens validitet. Vår handledare i examensarbetet bidrog även med kunskaper kring teori utöver den forskning och litteratur som använts under studiens gång vilket var ett stort stöd vid genomförandet.

6.2 Implikationer för läraryrket

Den aktuella studien har undersökt hur undervisningen bör utformas för att elever ska kunna utveckla förmågor inom bråk. Denna frågeställning är däruvav stort intresse för verksamma lärare. I kursplanen för matematik står det att undervisningen ska skapa förutsättningar för kunskapsutveckling och att stödja eleverna att applicera matematiska kunskaper inom vardagen och inom olika ämnesområden (Skolverket, 2022). Resultatet i studien visar att variationsteorin bidrar till att skapa förutsättningar för eleverna att tillägna sig kunskaper om bråktal vilket enligt forskning är ett av de områden som utgör svårigheter för elever, vilket även påverkar elevernas framtida matematikprestationer negativt (Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2020). Kunskap kring hur elever tillägnar sig kunskap kring bråk samt vilka kritiska aspekter många elever behöver identifiera är således av stort intresse för läraryrket. Metoden learning study som användes i studien med sin cykliska struktur kan dessutom hjälpa lärare att analysera både innehåll och lektionsstruktur vilket verkar utvecklande för lärarens didaktiska förmågor. Vidare skapas även en plattform för förbättringsarbete med fokus riktat på verksamheten där kollegialt lärande kan få ta plats (Holmqvist 2011; Magnusson & Maunula 2011).

Genomförandet av denna learning study har bidragit till stor individuell utveckling kring hur undervisningen kan planeras, vilket innehåll eller strategier som behöver belysas samt hur vi bedömer och ser på lärandet. Genom att variera innehållet utifrån variationsteorin anser vi att våra pedagogiska och didaktiska förmågor har berikats vilket ökat vår förmåga att både fånga barnens uppmärksamhet men framför allt lyckas rikta deras uppmärksamhet till ett specifikt innehåll vilket inom variationsteorin är en förutsättning för lärande (Lo 2014).

6.3 Framtida forskning

Den här studien har undersökt kritiska aspekter i matematikundervisningen gällande bråk samt hur matematikundervisningen bör utformas för att eleverna ska kunna urskilja de kritiska aspekterna. Dessa kritiska aspekter och undervisnings utformning har sedan undersökt i relation till hur elevernas lärande har utvecklats.

Utifrån svenska elevers prestationer inom matematik på exempelvis PISA 2022, där resultat ligger nära det rekordlåga resultatet från 2012 (Skolverket 2022), så är det av stort intresse från ett samhällsperspektiv att bryta den nergående trenden. Vidare utgör brist av förståelse inom bråktal till överföring av liknande svårigheter inom aritmetik med bråk, decimal och procent samt inom algebra (Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2020). Resultatet i denna studie visar att learning study inom bråk både bidrar till lärande för elever men lika viktigt, utvecklar medverkande lärares didaktiska förmågor.

Utifrån resultaten i denna studie kan framtida forskning fördjupa vår förståelse för hur möjliggörandet av kritiska aspekter i undervisningen utvecklar elevers förståelse och matematikprestationer. En möjlig framtida studie skulle exempelvis innefatta en långtidsstudie

som undersöker utvecklingen av elevers lärande inom bråk under en långsiktig matematikutveckling. Förslagsvis en studie som följer en elevgrupp från årskurs 4 till 6, där kvantitativa tester och kvalitativa intervjuer används för att följa förändring i elevernas prestationer.

En möjlig inriktning för framtida forskning är att genomföra en interventionsstudie som undersöker hur variationsteorin kan tillämpas i undervisningen av bråk. En sådan studie skulle kunna undersöka hur lärare som utbildas inom variationsteorin kan anpassa sin matematikundervisning för att göra kritiska aspekter mer tillgängliga för elever. Detta skulle kunna innefatta användning av konkreta representationsformer, visuella representationer och jämförelser mellan olika uttryckssätt för att tydliggöra lärandet inom matematikområdet bråk. På detta sätt kan studien bidra med insikter om vilka undervisningsstrategier som är mest lämpade för att främja elevernas lärande.

7. SLUTSATS

Slutsatserna från denna studie visar hur en learning study med implementering av ett variationsteoretiskt perspektiv, som bygger på innehållscentrerat lärande, resulterar i en framgångsrik matematikundervisning som erbjuder både variation och sammanhang. Resultaten visar att variationsmönster i undervisningen leder till en fördjupad och utvidgad förståelse av lärandeobjektet. Under forskningsprojektets gång ökade elevernas förmåga att använda ämnesspecifika matematiska begrepp samt förmågor kopplade till lärandeobjektet. De 60 deltagande eleverna kom in med varierande men jämn spridning av förkunskaper utifrån klasstillhörighet inför den första lärandecykeln, resultaten visar en marginell progression i kunskapsnivå mellan eleverna som deltog vid lärande cykel ett jämfört med lärandecykel tre. Utfallet av studien understryker att variation i undervisningen är av stor vikt för att eleverna ska kunna identifiera kritiska aspekter av lärandeobjektet, vilket är en förutsättning för att kunna tillägna sig ny kunskap enligt variationsteorin (Ling, 2014; Marton & Booth 2000). Matematikundervisning bör därför präglas av variation, där implementeringen av ett variationsteoretiskt perspektiv med fokus på kritiska aspekter för de valda innehållet verkar för att utveckla elevernas matematiska färdigheter.

REFERENSER

ALLEA (2023) Den europeiska kodexen för forskningens integritet, reviderad utgåva (svenska). Berlin. DOI 10.26356/ECOC-Swedish

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educ Stud Math* 107, 525–545 (2021). <https://doi-org.lib.costello.pub.hb.se/10.1007/s10649-021-10033-4>

Christoffersen, Line & Johannessen, Asbjørn (2015). *Forskningsmetoder för lärarstudenter*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur

Drageryd, K., Erdtman, M., Persson, U. & Kilhamn, C. (2012). Tallinjen – en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik. *Nämnamn*, 183 (3), 63-68
https://ncm.gu.se/media/stravorna/3/a/3A_drageryd.pdf

Eriksson Barajas, Katarina, Forsberg, Christina & Wengström, Yvonne (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. första upplagan Stockholm: Natur & Kultur

Flores, M. M., Hinton, V. M., & Meyer, J. M. (2020). Teaching Fraction Concepts Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence. *Remedial and Special Education*, 41(3), 165-175. <https://doi.org/10.1177/0741932518795477>

Fuchs, Lynn S; Schumacher, Robin F; Long, Jessica; Namkung, Jessica; Hamlett, Carol L; et al. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 105, Iss. 3, (Aug 2013): 683-700. <https://DOI.org/10.1037/a0032446>

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. and Content, A. (2012), Developing Children's Understanding of Fractions: An Intervention Study. *Mind, Brain, and Education*, 6: 137-146. <https://doi-org.lib.costello.pub.hb.se/10.1111/j.1751-228X.2012.01149.x>

Hajar, A. (2020). Theoretical foundations of phenomenography: a critical review. *Higher Education Research & Development*, 40(7), 1421-1436.
<https://doi.org/10.1080/07294360.2020.1833844>

Holmqvist, M. (2011), "Teachers' learning in a learning study", *Instructional Science*, Vol. 39 No. 4, pp. 497-511 *Instr Sci* (2011) 39:497–511 DOI 10.1007/s11251-010-9138-1

Hugues Lortie-Forgues, Jing Tian, Robert S. Siegler (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental review*, 2015-12, Vol.38, p.201-221.
<https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>

Joke Torbeyns, Michael Schneider, Ziqiang Xin, Robert S. Siegler. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*. Volume 37, June 2015, Pages 5-13
<https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>

Lo, Mun Ling (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur

Lo, M. L., & Marton, F. (2012). Towards a Science of the Art of Teaching. Using Variation Theory as a Guiding Principle of Pedagogical Design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), ss. 7-22. DOI:10.1108/20468251211179678

Löwing, Madeleine (2017). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. Andra upplagan Lund: Studentlitteratur

Martensson, P. 2019, "Learning to see distinctions through learning studies: Critical aspects as an example of pedagogical content knowledge", *International Journal for Lesson and Learning Studies*, vol. 8, no. 3, pp. 196-211. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-10-2018-0069>

Marton, F. and Booth, S., (1997), *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, Ference & Booth, Shirley (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur

Maunula, Tuula, Magnusson, Joakim & Echevarría, Christina (red.) (2011). *Learning study: undervisning gör skillnad*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur

Melissa DeWolf, Miriam Bassok, Keith J. Holyoak. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*. Volume 133, May 2015, Pages 72-84 <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.01.013>

Nancy C. Jordan, Nicole Hansen, Lynn S. Fuchs, Robert S. Siegler, Russell Gersten, Deborah Micklos. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures, *Journal of Experimental Child Psychology*. Volume 116, Issue 1, 2013, Pages 45-58, ISSN 0022-0965, <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001>

Rinne, Luke F; Ye, Ai; Jordan, Nancy C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology* Vol. 53, Iss. 4, (Apr 2017): 713-730. <https://doi.org/10.1037/dev0000275> SAN DIEGO: Elsevier Inc

Robert S. Siegler, Clarissa A. Thompson, Michael Schneider (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*. Volume 62, Issue 4, June 2011, Pages 273-296 <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>

Rojo, M., King, S., Gersib, J., & Bryant, D. P. (2023). Rational Number Interventions for Students With Mathematics Difficulties: A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education*, 44(3), 225-238. <https://doi.org/10.1177/07419325221105520>

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 69–87. <https://doi-org.lib.costello.pub.hb.se/10.1080/0305764042000332506>

Runesson, U. (2004). Med lärandets innehåll i fokus. *Nämna nr 1*, s 34 – 37

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4), 346-351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>

Skolverket (2022) Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet – LGR22, Stockholm: Skolverket. Kursplan - Matematik (Grundskolan) - Skolverket [Hämtad: 20 Oktober 2024]

Sveider, C. Thorsten, A. Samuelsson, J. (2024) Undervisning som utvecklar elevers förmåga att förstå likvärdiga bråk. *Forskning om undervisning och lärande*, vol. 12, nr 3, 2024, s. 39–59 DOI: 10.61998/forskul.v12i3.26656 ISSN:2001-6131

Tan, K. Variation theory and the different ways of experiencing educational policy. *Educ Res Policy Prac* 8, 95–109 (2009). <https://doi-org.lib.costello.pub.hb.se/10.1007/s10671-008-9060-3>

Thorsten, A., (2017), Generating knowledge in a Learning Study: from the perspective of a teacher researcher, *Educational action research*, 25(1), 140-154. DOI:10.1080/09650792.2016.1141108

Thorsten, A. (2015), “How teachers’ practice knowledge is used and challenged in a learning study using variation theory as a tool”, *International Journal of Lesson and Learning Studies*, Vol. 4 No. 3, pp. 274-287.

Van de Walle, John A., Karp, Karen S. & Bay-Williams, Jennifer M. (2020). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Tenth Edition ; Global Edition Harlow: Pearson Education Limited

Wernberg, Anna (red.) (2006). *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur

BILAGOR

Fråga 1 RB3 Begrepp d	Fråga 2 RB3 Del av ant	Fråga 3 RB3 Del av antal / beo	Fråga 1 RB4 ta	Fråga 2 RB4 ta	Fråga 3 RB4 Storleksf	Fråga 4 RB4 Likvär	Fråga 5 RB4 Likvärdiga bråk	Fråga 6 RB4	Fråga 7 referenspunkt	Fråga 8
A 13 15 15 21 21 21 61,90% 71,43% 71,43%	A2 21 5 4 21 21 21 100,00% 23,81% 19,05%	A5 21 10 12 10 21 21 21 21 100,00% 47,62% 57,14% 47,62%	A8 7 4 21 21 33,33% 19,05%	A10 4 12 21 21 19,05% 57,14%	A12 9 9 9 21 21 21 42,86% 42,86% 42,86%	A15 11 9 21 21 52,38% 42,86%	A15 6 6 0 4 21 21 21 21 28,57% 28,57% 0,00% 19,05%	A19 7 21 33,33%	A(2 p) 6 4 3 42 42 42 14,29% 9,52% 7,14%	A20 11 7 5 21 21 21 52,38% 33,33% 23,81%
A 17 17 17 21 21 21 80,95% 80,95% 80,95%	A2 21 9 8 21 21 21 100,00% 42,86% 38,10%	A5 20 11 10 10 21 21 21 21 95,24% 52,38% 47,62% 47,62%	A8 11 6 21 21 52,38% 28,57%	A10 5 13 21 21 23,81% 61,90%	A12 11 11 11 21 21 21 52,38% 52,38% 52,38%	A15 8 9 21 21 38,10% 42,86%	A15 11 8 0 9 21 21 21 21 52,38% 38,10% 0,00% 42,86%	A19 9 21 42,86%	A(2 p) 22 22 22 42 42 42 52,38% 52,38% 52,38%	A20 16 9 11 21 21 21 76,19% 42,86% 52,38%
19,05% 9,52% 9,52%	0,00% 19,05% 19,05%	-4,76% 4,76% -9,52% 0,00%	19,05% 9,52%	4,76% 4,76%	9,52% 9,52% 9,52%	-14,29% 0,00%	23,81% 9,52% 0,00% 23,81%	9,52%	38,10% 42,86% 45,24%	23,81% 9,52% 28,57%
A 15 14 14 19 19 19 78,95% 73,68% 73,68%	A2 19 9 7 19 19 19 100,00% 47,37% 36,84%	A5 17 12 10 10 19 19 19 19 89,47% 63,16% 52,63% 52,63%	A8 12 7 19 19 63,16% 36,84%	A10 6 9 19 19 31,58% 47,37%	A12 9 9 7 19 19 19 47,37% 47,37% 36,84%	A15 10 11 19 19 52,63% 57,89%	A15 8 10 0 12 19 19 19 19 42,11% 52,63% 0,00% 63,16%	A19 10 19 52,63%	A(2 p) 9 7 14 38 38 38 23,68% 18,42% 36,84%	A20 9 2 1 19 19 19 47,37% 10,53% 5,26%
A 13 14 13 19 19 19 68,42% 73,68% 68,42%	A2 19 11 8 19 19 19 100,00% 57,89% 42,11%	A5 19 11 9 11 19 19 19 19 100,00% 57,89% 47,37% 57,89%	A8 12 8 19 19 63,16% 42,11%	A10 10 15 19 19 52,63% 78,95%	A12 11 11 11 19 19 19 57,89% 57,89% 57,89%	A15 12 13 19 19 63,16% 68,42%	A15 13 12 3 13 19 19 19 19 68,42% 63,16% 15,79% 68,42%	A19 14 19 73,68%	A(2 p) 25 22 26 38 38 38 65,79% 57,89% 68,42%	A20 10 4 3 19 19 19 52,63% 21,05% 15,79%
-10,53% 0,00% -5,26%	0,00% 10,53% 5,26%	10,53% -5,26% -5,26% 5,26%	0,00% 5,26%	21,05% 31,58%	10,53% 10,53% 21,05%	10,53% 10,53%	26,32% 10,53% 15,79% 5,26%	21,05%	42,11% 39,47% 31,58%	5,26% 10,53% 10,53%
A 13 14 14 20 20 20 65,00% 70,00% 70,00%	A2 20 7 3 20 20 20 100,00% 35,00% 15,00%	A5 19 10 9 8 20 20 20 20 95,00% 50,00% 45,00% 40,00%	A8 8 6 20 20 40,00% 30,00%	A10 8 10 20 20 40,00% 50,00%	A12 8 8 8 20 20 20 40,00% 40,00% 40,00%	A15 13 12 20 20 65,00% 60,00%	A15 9 6 0 6 20 20 20 20 45,00% 30,00% 0,00% 30,00%	A19 6 20 30,00%	A(2 p) 11 7 11 40 40 40 27,50% 17,50% 27,50%	A20 10 9 2 20 20 20 50,00% 45,00% 10,00%
A 17 16 16 20 20 20 85,00% 80,00% 80,00%	A2 19 12 9 20 20 20 95,00% 60,00% 45,00%	A5 18 9 9 8 20 20 20 20 90,00% 45,00% 45,00% 40,00%	A8 8 8 20 20 40,00% 40,00%	A10 7 15 20 20 35,00% 75,00%	A12 16 17 17 20 20 20 80,00% 85,00% 85,00%	A15 11 11 20 20 55,00% 55,00%	A15 10 10 2 12 20 20 20 20 50,00% 50,00% 10,00% 60,00%	A19 7 20 35,00%	A(2 p) 27 23 28 40 40 40 67,50% 57,50% 65,00%	A20 11 12 3 20 20 20 55,00% 60,00% 15,00%
20,00% 10,00% 10,00%	-5,00% 25,00% 30,00%	-5,00% -5,00% 0,00% 0,00%	0,00% 10,00%	-5,00% 25,00%	40,00% 45,00% 45,00%	-10,00% -5,00%	5,00% 20,00% 10,00% 30,00%	5,00%	40,00% 40,00% 37,50%	5,00% 15,00% 5,00%
MedelFT 68,62% 71,70% 71,70%	100,00% 35,39% 23,63%	94,82% 53,59% 51,59% 46,75%	45,50% 28,63%	30,21% 51,50%	43,41% 43,41% 39,90%	56,67% 53,58%	38,56% 37,07% 0,00% 37,40%	38,65%	21,82% 15,15% 23,83%	49,92% 29,62% 13,02%
MedelET 78,12% 78,21% 76,46%	98,33% 53,58% 41,73%	95,08% 51,76% 46,66% 48,50%	51,85% 36,89%	37,15% 71,95%	63,43% 65,09% 65,09%	52,08% 55,43%	56,93% 50,42% 8,60% 57,09%	50,51%	61,89% 55,93% 61,93%	61,27% 41,30% 27,72%



Informationsbrev

2024-09-09

Till vårdnadshavare med barn på XXXXXXXXskolan åk 4.

Vi heter Adam och Johan och studerar vår åttonde och sista termin till grundskollärare vid Akademin för bibliotek, information, pedagogik och IT, på i Högskolan i Borås. Under sista terminen ska vi studenter genomföra ett examensarbete där ett valt område skall undersökas.

Vi har valt att fokusera på bråk inom matematikämnet. Vi kommer att observera, genomföra intervjuer, utföra för- och eftertest samt planera lektioner som videofilmas för analysering och utvärdering. Studien är utformad utifrån en Learning Study, vilket innebär att vi forskare tillsammans med pedagoger kommer att planera, reflektera, utvärdera och ompröva lektioner för att utveckla elevers lärande inom matematikområdet bråk.

Det är viktigt att ni som vårdnadshavare vet att vi i vår undersökning utgår ifrån de forskningsetiska principerna. Det innebär följande:

- Alla uppgifter i undersökningen kommer att behandlas med största varsamhet, så att inga obehöriga kan ta del av dem.
- De uppgifter som framkommit i undersökningen används enbart för denna undersöknings syfte.
- Alla uppgifter kring deltagarna i undersökningen kommer att vara konfidentiella. Fiktiva namn på elever, pedagoger och skola används så att allas identiteter skyddas.
- Undersökningen är frivillig och det går när som helst att avbryta deltagandet.

För att kunna genomföra undersökningen behövs vårdnadshavares samtycke. Vi ber er därför fylla i blanketten som följer med denna information och därefter lämna till klasslärare på skolan.

Om ni har frågor och funderingar kring undersökningen kan ni nå oss på mail, Adam Lindberg XXXXXXXXX, Johan Issa XXXXXXXXX

Med vänliga hälsningar,

Bilaga 2



Samtyckesblankett för vårdnadshavare

Jag/vi har informerats om undersökningen "Learning Study om Bråk" och tagit del av de forskningsetiska principer som studien vilar på. Jag/vi vet att mitt/vårt barns deltagande är helt frivilligt och att deltagandet när som helst kan avbrytas. Ringa in valt alternativ.

JA, jag/vi samtycker till att mitt/vårt barn ska få delta i undersökningen.

NEJ, jag/vi samtycker INTE till att mitt/vårt barn ska få delta i undersökningen.

Barnets namn

Underskrift vårdnadshavare

Namnförtydligande

Underskrift vårdnadshavare

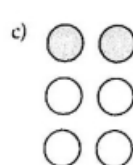
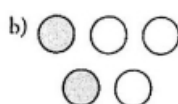
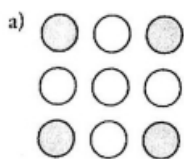
Namnförtydligande

Datum: _____

DIAGNOS RB3

Namn _____ Klass _____

1 Hur stor andel av cirkelarna är skuggade? Svara i bråkform.



Svar: _____

Svar: _____

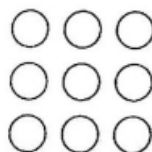
Svar: _____

2 Skugga

a) $\frac{3}{5}$ av cirkelarna



b) $\frac{1}{3}$ av cirkelarna



c) $\frac{3}{4}$ av cirkelarna



3 Hur mycket är

a) hälften av 12? _____

b) en tredjedel av 6? _____

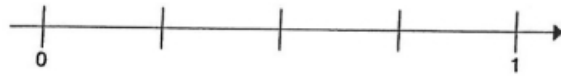
c) en femtedel av 10? _____

d) en fjärdedel av 8? _____

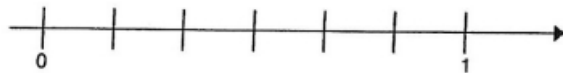
DIAGNOS RB4

Namn _____ Klass _____

- 1 Sätt ett a vid talet $\frac{1}{2}$ på tallinjen och ett b vid talet $\frac{1}{4}$ på tallinjen.



- 2 Sätt ett a vid talet $\frac{1}{3}$ på tallinjen och ett b vid talet $\frac{5}{6}$ på tallinjen.



- 3 Vilket av de två talen är störst?
Gör en ring omkring det största talet i varje par.

a) $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$

- 4 Jämför de båda talen i uppgifterna.
Ringa in de uppgifter där båda talen är lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$

d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

- 5 Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora.

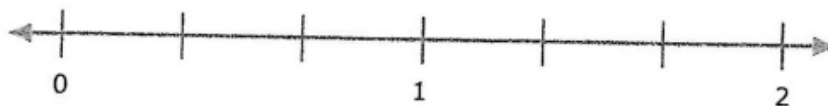
a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{12}$

b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{\quad}{9} = \frac{\quad}{12}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{\quad}{15} = \frac{\quad}{18}$

d) $1 = \frac{2}{2} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{7}$

6. Placera ut $\frac{4}{3}$ på tallinjen



7. Vilka av dessa tal

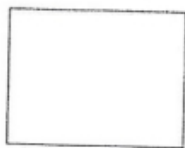
$$\frac{6}{11} \quad \frac{13}{12} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{8}{7}$$

- a) Är mindre än $\frac{1}{2}$ b) Är större än $\frac{1}{2}$ men mindre än 1 c) Är större än 1

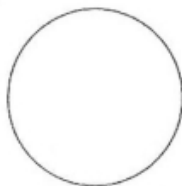
8.

Skugga $\frac{2}{3}$ av följande figurer.

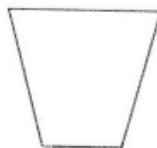
a)



b)



c)





HÖGSKOLAN I BORÅS

Besöksadress: Allégatan 1 · Postadress: 501 90 Borås · Tfn: 033-435 40 00 · E-post: registrator@hb.se · Webb: www.hb.se